MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2016
Klausur
02.08.2016

Klausur zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“

1. a) Man formuliere den Mittelwertsatz der Differentialrechnung und zeige damit
$$1 - \frac{a}{b} < \ln b - \ln a < \frac{b}{a} - 1 \qquad \text{für alle} \quad 0 < a < b. \tag{3}$$
   b) Man folgere aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung den Satz von Rolle und zeige damit, daß eine zweimal differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f''(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ höchstens zwei Nullstellen besitzen kann. (3)

2. a) Man berechne das bestimmte Integral
$$\int_1^2 \frac{(x-1)(x-2)}{x(x+1)(x+2)}\, dx. \tag{3}$$
   b) Man berechne das unbestimmte Integral
$$\int 2\, x^3 \sin\left(x^2\right) dx. \tag{3}$$

3. a) Für den Punkt $a \in \mathbb{R}$ und die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ betrachte man die Potenzreihe
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x-a)^n$$
   mit Konvergenzradius $\varrho \in \mathbb{R}^+$. Man formuliere den Hauptsatz über Potenzreihen zu den Eigenschaften der Funktion
$$f : \,]a-\varrho,\ a+\varrho[\, \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x-a)^n\,. \tag{3}$$
   b) Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Reihen
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} n\, x^{2n}$$
   konvergieren, und gebe hierfür jeweils den Grenzwert an. (3)

4. Gegeben sei die Kurve
$$f : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad f(t) = (1 - 2\cos t,\ 2\sin t)\,;$$
   es bezeichne $K = \{f(t) \mid t \in [0,\pi]\}$ ihre Bildmenge im x–y–Koordinatensystem.
   a) Man bestimme alle Parameterwerte $t \in [0,\pi]$, für die die Tangente parallel zu einer Koordinatenachse verläuft, und skizziere K. (2)
   b) Man berechne die Bogenlänge von f über die einschlägige Formel. (2)
   c) Man berechne den Inhalt der von K und der x–Achse eingeschlossenen Fläche über ein geeignetes Integral. (2)