

Tutorium zur Vorlesung „Differential- und Integralrechnung II“ — Bearbeitungsvorschlag —

49. a) Der maximale Definitionsbereich D der Funktion

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \sqrt{\frac{y}{x^2} - 1} + 4,$$

besteht genau aus denjenigen Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, für die weder der auftretende Nenner verschwindet noch der Radikand negativ wird, also für

$$x \neq 0 \quad \text{und} \quad \frac{y}{x^2} - 1 \geq 0 \iff \frac{y}{x^2} \geq 1 \iff y \geq x^2.$$

Da die Quadratwurzel ausschließlich nichtnegative Werte annimmt, gilt zunächst $W \subseteq [4; \infty[$. Zum Nachweis von „ \supseteq “ betrachten wir sodann die Punkte $(t^2 + 1, (t^2 + 1)^3) \in D$ für $t \in \mathbb{R}$ mit

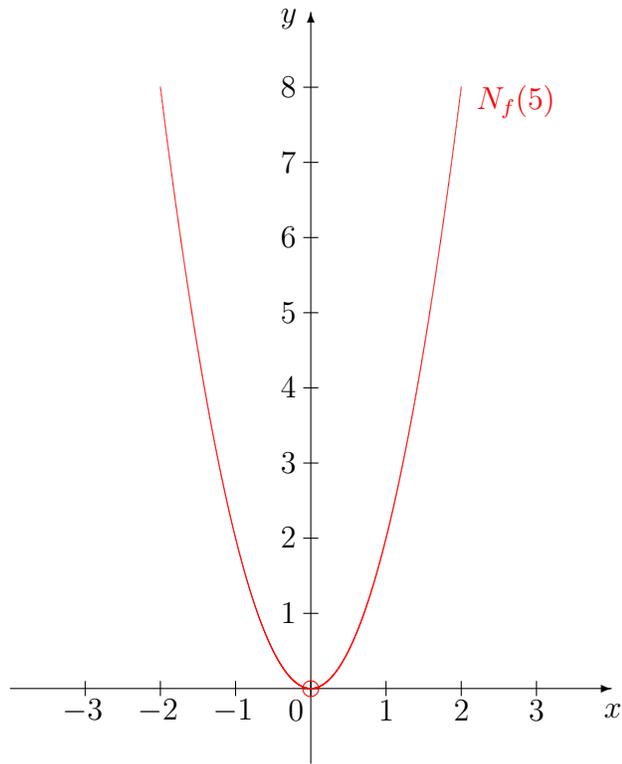
$$\begin{aligned} h(t) = f(t^2 + 1, (t^2 + 1)^3) &= \sqrt{\frac{(t^2 + 1)^3}{(t^2 + 1)^2} - 1} + 4 = \\ &= \sqrt{t^2 + 1 - 1} + 4 = \sqrt{t^2} + 4 = |t| + 4; \end{aligned}$$

da h eine Betragsfunktion mit dem Achsenabschnitt 4 ist, gilt $W \supseteq [4; \infty[$, insgesamt also $W = [4; \infty[$.

- b) Für den Punkt $(-2; 4)$ gilt $f(-2; 4) = 4 \leq f(x, y)$ für alle $(x, y) \in D$. Damit liegt in $(-2; 4)$ ein globales Minimum vor.
- c) Sei $c = 5$; für alle $(x, y) \in D$ gilt

$$\begin{aligned} (x, y) \in N_f(5) &\iff f(x, y) = 5 \iff \\ &\iff \sqrt{\frac{y}{x^2} - 1} + 4 = 5 \iff \sqrt{\frac{y}{x^2} - 1} = 1 \iff \\ &\iff \frac{y}{x^2} - 1 = 1 \iff \frac{y}{x^2} = 2 \iff y = 2x^2 \end{aligned}$$

Damit ist $N_f(c)$ die an ihrem Scheitel $(0, 0)$ punktierte Parabel mit der Gleichung $y = 2x^2$:



50. Zu betrachten ist die Menge

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2\pi \text{ und } \cos x \leq y \leq \sin x\};$$

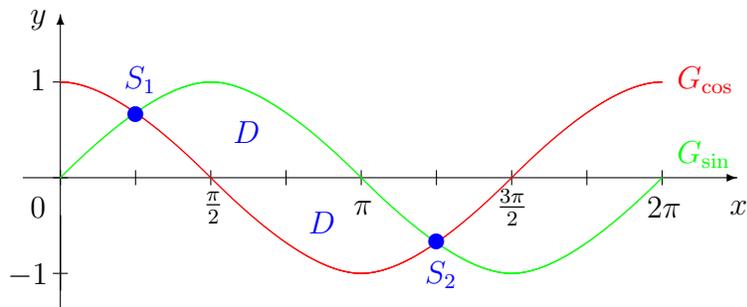
wegen

$$\cos x = \sin x \iff 1 = \tan x \iff x \in \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right\}$$

für alle $x \in [0, 2\pi]$ besitzen die beiden Graphen G_{\cos} und G_{\sin} in diesem Bereich genau die beiden Schnittpunkte $S_1 = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ und $S_2 = \left(\frac{5\pi}{4}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$, und wegen

$$\cos x \leq \sin x \iff x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right]$$

ist $D \subseteq \mathbb{R}^2$ genau der abgeschlossene Bereich, der von den Graphen G_{\cos} und G_{\sin} zwischen ihren Schnittpunkten S_1 und S_2 begrenzt wird:



Für alle $(x, y) \in D$ gilt

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= (y - \sin x)(y - \cos x) \\
 &= y^2 - (\sin x + \cos x)y + \sin x \cos x \\
 &= \left(y^2 - 2 \cdot \frac{\sin x + \cos x}{2} \cdot y + \left(\frac{\sin x + \cos x}{2} \right)^2 \right) + \\
 &\quad + \sin x \cos x - \left(\frac{\sin x + \cos x}{2} \right)^2 \\
 &= \left(y - \frac{\sin x + \cos x}{2} \right)^2 + \sin x \cos x - \frac{\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x}{4} \\
 &= \left(y - \frac{\sin x + \cos x}{2} \right)^2 + \frac{2 \sin x \cos x}{4} - \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{4} \\
 &= \underbrace{\left(y - \frac{\sin x + \cos x}{2} \right)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{\sin(2x)}{4}}_{\geq -\frac{1}{4}} - \frac{1}{4} \geq 0 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

mit

$$f\left(\frac{3}{4}\pi, 0\right) = \left(0 - \underbrace{\sin \frac{3}{4}\pi}_{=\frac{1}{2}\sqrt{2}}\right) \left(0 - \underbrace{\cos \frac{3}{4}\pi}_{=-\frac{1}{2}\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = -\frac{1}{2},$$

also

$$f(x, y) \geq -\frac{1}{2} = f\left(\frac{3}{4}\pi, 0\right),$$

so daß $\left(\frac{3}{4}\pi, 0\right)$ eine globale Minimalstelle der Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist.

51. Zur Bestimmung der globalen Extremstellen der gegebenen Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = (x^2 + 10xy + y^2)e^{x^2+y^2}$$

auf der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

betrachten wir für den Punkt (x, y) von K die Polarkoordinaten $(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ mit $r \in [0, 1]$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$; dabei gilt

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \\
 &= \left((r \cos \varphi)^2 + 10 \cdot r \cos \varphi \cdot r \sin \varphi + (r \sin \varphi)^2 \right) \cdot e^{(r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2} = \\
 &= r^2 (\cos^2 \varphi + 10 \sin \varphi \cos \varphi + \sin^2 \varphi) \cdot e^{r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} \stackrel{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1}{=} \\
 &= r^2 (1 + 10 \sin \varphi \cos \varphi) e^{r^2} \stackrel{2 \sin \varphi \cos \varphi = \sin(2\varphi)}{=} \left(r^2 e^{r^2} \right) (1 + 5 \sin(2\varphi)).
 \end{aligned}$$

Wegen $0 \leq r \leq 1$ gilt

$$0 \leq r^2 e^{r^2} \leq 1 \cdot e^1 = e,$$

und wegen $-1 \leq \sin(2\varphi) \leq 1$ gilt

$$-4 \leq 1 + 5 \sin(2\varphi) \leq 6,$$

woraus sich insgesamt

$$-4e \leq f(x, y) \leq 6e$$

ergibt; wegen

$$\begin{aligned} f(x, y) = -4e &\iff r^2 e^{r^2} = e \text{ und } 1 + 5 \sin(2\varphi) = -4 \iff \\ &\iff r = 1 \text{ und } 2\varphi \in \left\{ \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2} \right\} \iff r = 1 \text{ und } \varphi \in \left\{ \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\} \end{aligned}$$

sind $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ und $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ die globalen Minimalstellen von f , und wegen

$$\begin{aligned} f(x, y) = 6e &\iff r^2 e^{r^2} = e \text{ und } 1 + 5 \sin(2\varphi) = 6 \iff \\ &\iff r = 1 \text{ und } 2\varphi \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \right\} \iff r = 1 \text{ und } \varphi \in \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right\} \end{aligned}$$

sind $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ und $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ die globalen Maximalstellen von f .

52. Die zu betrachtende Menge

$$\{x^3 + y^3 \mid x, y \in [0, \infty[\text{ und } x^2 + y^2 = 1\}$$

ist der Wertebereich der Funktion

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^3 + y^3,$$

wobei der Definitionsbereich

$$D = \{(x, y) \in [0, \infty[\times [0, \infty[\mid x^2 + y^2 = 1\}$$

der im abgeschlossenen 1. Quadranten liegende Viertelkreisbogen des Einheitskreises ist. Für einen Punkt (x, y) von D betrachten wir seine Polardarstellung $(\cos \varphi, \sin \varphi)$ mit $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$; damit ist

$$f(x, y) = f(\cos \varphi, \sin \varphi) = \cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi,$$

wir haben also den Wertebereich der Hilfsfunktion

$$h : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(\varphi) = \cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi,$$

zu bestimmen. Nach dem Satz von Weierstraß nimmt die stetige Funktion h auf dem abgeschlossenen Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ ein globales Minimum p und ein globales Maximum q an, und es gilt $W_h = [h(p), h(q)]$; hierfür kommen nur die beiden Randpunkte 0 und $\frac{\pi}{2}$ sowie die Nullstellen der Ableitung h' in $]0, \frac{\pi}{2}[$ in Frage, wegen

$$h'(\varphi) = 3 \cos^2 \varphi \cdot (-\sin \varphi) + 3 \sin^2 \varphi \cdot \cos \varphi = 3 \sin \varphi \cos \varphi (-\cos \varphi + \sin \varphi)$$

für alle $\varphi \in [0; \frac{\pi}{2}]$ ist dies nur $\frac{\pi}{4}$. Der Wertevergleich

$$h(0) = h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad \text{sowie} \quad h\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

zeigt, daß $p = \frac{\pi}{4}$ und $q \in \{0, \frac{\pi}{2}\}$ mit $W_h = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$ ist.