MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2016
Blatt 12
06.07.2016

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“ — Bearbeitungsvorschlag —

45. a) Für die beiden Rechtecke

$$R_1 = [-3,3] \times [-1,1] \qquad \text{und} \qquad R_2 = \,]-1,1[\, \times \,]-3,3[$$

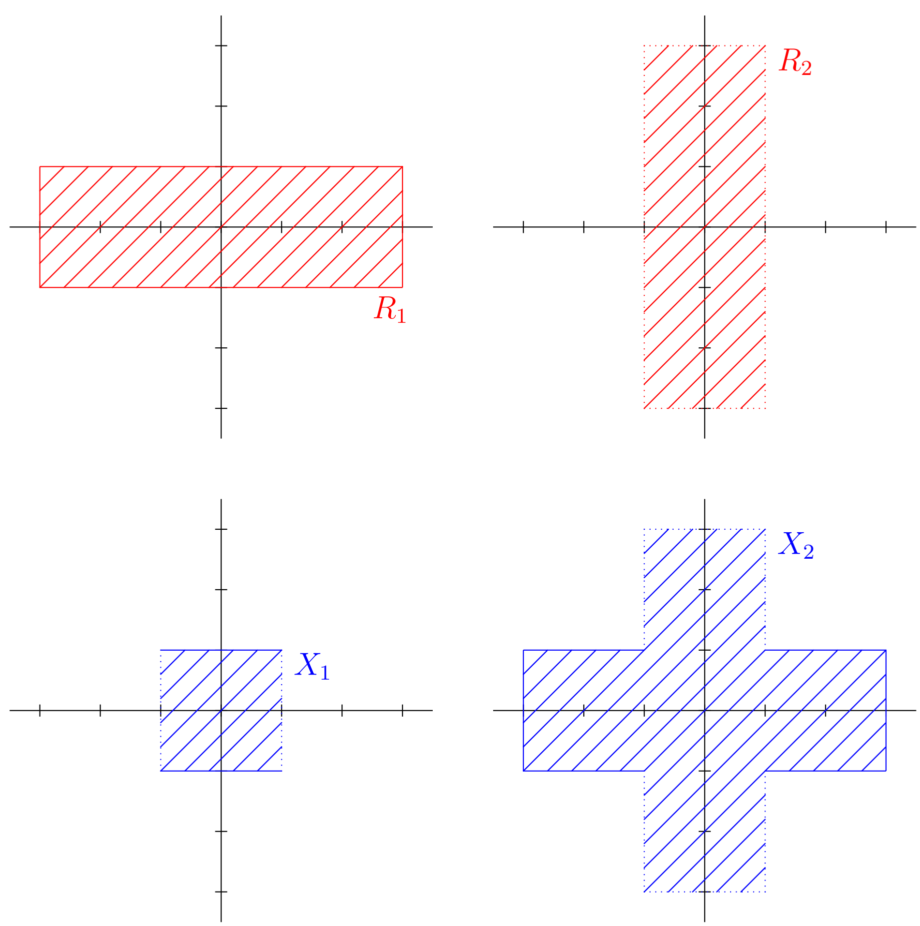
ergibt sich zum einen das Quadrat

$$X_1 = R_1 \cap R_2 = \,]-1,1[\, \times [-1,1]$$

und zum anderen das „Kreuz“

$$X_2 = R_1 \cup R_2 = \big([-3,3] \times [-1,1]\big) \cup \big(\,]-1,1[\, \times \,]-3,3[\,\big),$$

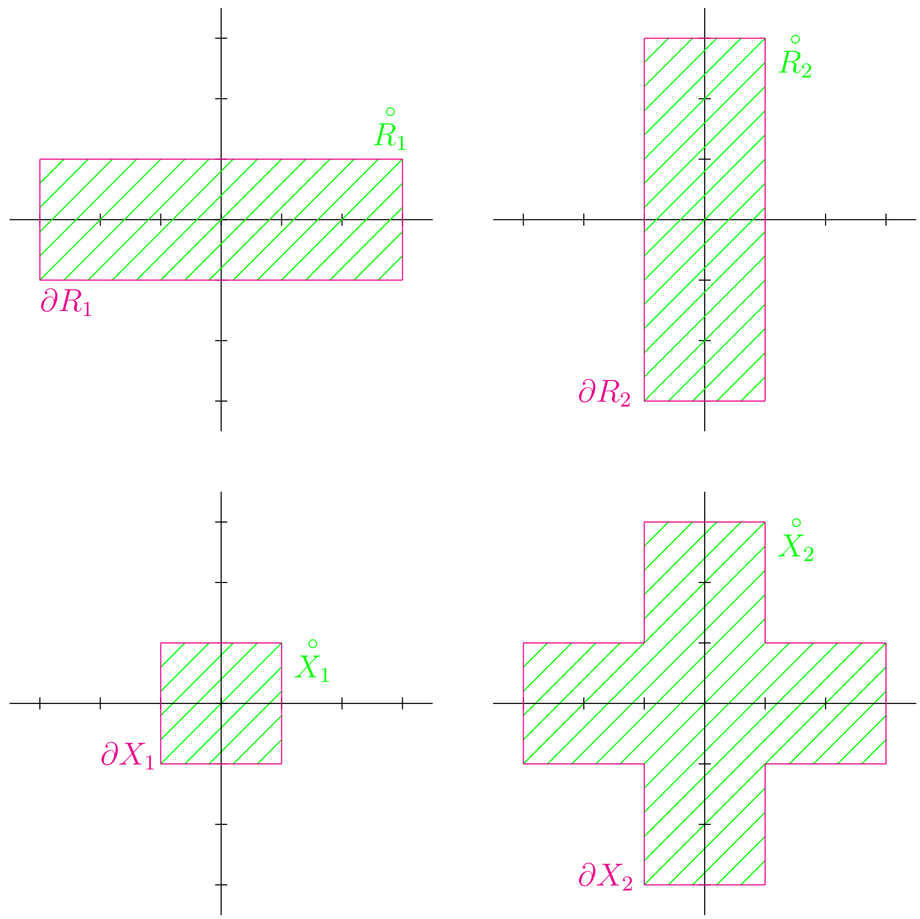
und wir erhalten die folgenden Skizzen:



Die Rechtecke R_1 und R_2 sowie das Quadrat X_1 sind konvex und damit insbesondere zusammenhängend; für das „Kreuz" X_2 beobachtet man:

- Für die beiden Punkte $x = (-3, 0) \in X_2$ und $y = (0, 2) \in X_2$ verläuft die Verbindungsstrecke nicht komplett in X_2; damit ist X_2 nicht konvex.
- X_2 ist zusammenhängend, da es für je zwei Punkte x, $y \in X_2$ eine Kurve $f : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ mit $f(a) = x$ und $f(b) = y$ gibt, die ganz in X_2 verläuft. Wir wählen etwa den Streckenzug, der $x \in X_2$ über den Ursprung $(0, 0) \in X_2$ mit $y \in X_2$ verbindet.

b) Wir betrachten die folgende Skizze:



Damit ergibt sich:

- Das Rechteck $R_1 = [-3, 3] \times [-1, 1]$ besitzt
  - den Rand $\partial R_1 = \big(\{-3, 3\} \times [-1, 1]\big) \cup \big([-3, 3] \times \{-1, 1\}\big)$ sowie
  - das Innere $\mathring{R}_1 = \,]-3, 3[\times]-1, 1[$ und
  - den Abschluß $\overline{R_1} = [-3, 3] \times [-1, 1] = R_1$;

  wegen $R_1 = \overline{R_1}$ ist R_1 abgeschlossen.
- Das Rechteck $R_2 = \,]-1, 1[\times]-3, 3[$ besitzt
  - den Rand $\partial R_2 = \big(\{-1, 1\} \times [-3, 3]\big) \cup \big([-1, 1] \times \{-3, 3\}\big)$ sowie

- das Innere $\overset{\circ}{R_2} =]-1, 1[\times]-3, 3[= R_2$ und
- den Abschluß $\overline{R_2} = [-1, 1] \times [-3, 3]$;

wegen $R_2 = \overset{\circ}{R_2}$ ist R_2 offen.

- Das Quadrat $X_1 = [-1, 1] \times]-1, 1[$ besitzt
  - den Rand $\partial X_1 = \big(\{-1, 1\} \times [-1, 1]\big) \cup \big([-1, 1] \times \{-1, 1\}\big)$ sowie
  - das Innere $\overset{\circ}{X_1} =]-1, 1[\times]-1, 1[$ und
  - den Abschluß $\overline{X_1} = [-1, 1] \times [-1, 1]$.

  Wegen $\overset{\circ}{X_1} \neq X_1$ und $X_1 \neq \overline{X_1}$ ist X_1 weder offen noch abgeschlossen.
- Das „Kreuz“ $X_2 = \big([-3, 3] \times [-1, 1]\big) \cup \big(]-1, 1[\times]-3, 3[\big)$ besitzt
  - den Rand

$$\partial X_2 = \big(\{-3, 3\} \times [-1, 1]\big) \cup \big(\{-1, 1\} \times \big([-3, -1] \cup [1, 3]\big)\big) \cup \\ \cup \big([-1, 1] \times \{-3, 3\}\big) \cup \big(\big([-3, -1] \cup [1, 3]\big) \times \{-1, 1\}\big)$$

  sowie
  - das Innere $\overset{\circ}{X_2} = \big(]-3, 3[\times]-1, 1[\big) \cup \big(]-1, 1[\times]-3, 3[\big)$ und
  - den Abschluß $\overline{X_2} = \big([-3, 3] \times [-1, 1]\big) \cup \big([-1, 1] \times [-3, 3]\big)$.

  Wegen $\overset{\circ}{X_2} \neq X_2$ und $X_2 \neq \overline{X_2}$ ist X_2 weder offen noch abgeschlossen.

46. a) Als innerer Punkt von X kommt nur ein Element von X, also ein Stammbruch $\frac{1}{n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ in Frage; für jedes $r > 0$ enthält aber das Intervall

$$K_r\left(\tfrac{1}{n}\right) = \left]\tfrac{1}{n} - r; \tfrac{1}{n} + r\right[$$

auch irrationale Zahlen, und damit ist $K_r(\frac{1}{n}) \not\subseteq X$. Folglich besitzt X keine inneren Punkte, es ist also $\overset{\circ}{X} = \emptyset$.

b) Zunächst kommt kein Element von X als äußerer Punkt von X in Frage. Ferner gibt es zu jedem $r > 0$ nach dem archimedischen Axiom ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < r$, so daß sich $\frac{1}{n} \in X \cap K_r(0)$ und damit $X \cap K_r(0) \neq \emptyset$ ergibt; folglich ist auch 0 kein äußerer Punkt von X.

Wir zeigen nun, daß jeder Punkt $a \in \mathbb{R}$, der nicht in $X \cup \{0\}$ liegt, ein äußerer Punkt der Menge X ist:

- Für $a < 0$ wähle man $r = -a > 0$, und es ist

$$K_r(a) =]a - r;\ a + r[=]2a; 0[$$

  und damit $X \cap K_r(a) = \emptyset$.
- Für $a > 1$ wähle man $r = a - 1 > 0$, und es ist

$$K_r(a) =]a - r;\ a + r[=]1; 2a - 1[$$

  und damit $X \cap K_r(a) = \emptyset$.

- Für $0 < a < 1$ mit $a \notin X$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n+1} < a < \frac{1}{n}$. Man betrachte die Abstände $d_1 = a - \frac{1}{n+1}$ und $d_2 = \frac{1}{n} - a$ von a zu den beiden benachbarten Stammbrüchen $\frac{1}{n+1}$ und $\frac{1}{n}$ und wähle $r = \min\{d_1, d_2\} > 0$; damit gilt $X \cap K_r(a) = \emptyset$ nach Wahl von r.

Insgesamt gilt also $\partial X = X \cup \{0\}$ mit $\overset{\circ}{X} = \emptyset$ und $\overline{X} = \partial X$.

47. Bei der zu betrachtenden Menge

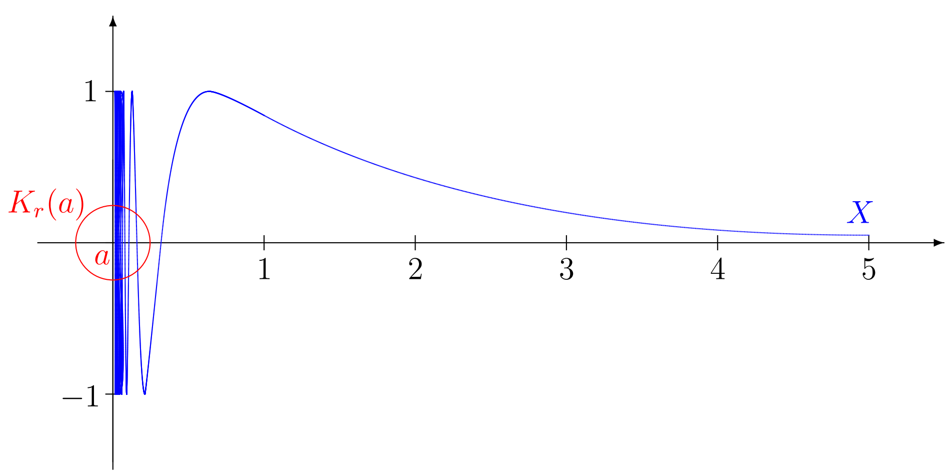
$$X = \left\{ \left(x,\ \sin \frac{1}{x} \right) \mid x \in \mathbb{R}^+ \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

handelt es sich um den Graphen der Funktion

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin \frac{1}{x};$$

dabei gilt

$$f(x) = 0 \iff \sin \frac{1}{x} = 0 \underset{x>0}{\iff} \frac{1}{x} = k\pi, \quad \text{also} \quad x = \frac{1}{k\pi} \quad \text{für ein} \quad k \in \mathbb{N}.$$



Sei $a = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$. Für jedes $r > 0$ betrachten wir die offene Kreisscheibe $K_r(a)$ um den Mittelpunkt a mit dem Radius r:

- Es ist $a \in K_r(a)$, und wegen $X \subseteq \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ ist $a \notin X$. Folglich gilt $K_r(a) \not\subseteq X$.
- Wegen $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k\pi} = 0$ gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_0 = \frac{1}{k_0\pi} < r$, also $(x_0, 0) \in K_r(a)$, und wegen $x_0 \in \mathbb{R}^+$ mit $f(x_0) = \sin \frac{1}{x_0} = \sin(k_0\pi) = 0$ ist $(x_0, 0) \in X$. Folglich ist $K_r(a) \cap X \neq \emptyset$.

Damit ist a ein Randpunkt von X.

48. a) Die für den Parameter $a > 0$ gegebene Kurve

$$f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad f_a(t) = \left(e^{at} \cos t,\ e^{at} \sin t \right) = e^{at} \cdot (\cos t, \sin t),$$

ist stetig differenzierbar, und für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} f_a'(t) &= \big(a\, e^{at} \cos t - e^{at} \sin t,\ a\, e^{at} \sin t + e^{at}\ \cos t\big) \\ &= e^{at} \cdot \underbrace{(a\ \cos t - \sin t,\ a\ \sin t + \cos t)}_{=:v(t)}; \end{aligned}$$

dabei ergibt sich für die Längen von $f_a(t)$ und $f_a'(t)$ zum einen

$$\|f_a(t)\| = e^{at}\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = e^{at}$$

und zum anderen wegen

$$\begin{aligned} \|v(t)\|^2 &= (a\ \cos t - \sin t)^2 + (a\ \sin t + \cos t)^2 \\ &= \big(a^2 \cos^2 t - 2a \cos t \sin t + \sin^2 t\big) + \\ &\qquad + \big(a^2 \sin^2 t + 2a \sin t \cos t + \cos^2 t\big) \\ &= a^2 \left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) + \left(\sin^2 t + \cos^2 t\right) \\ &= a^2 + 1, \end{aligned}$$

also $\|v(t)\| = \sqrt{a^2+1}$, dann

$$\|f_a'(t)\| = e^{at} \cdot \sqrt{a^2+1}.$$

Für $t \in \mathbb{R}$ besitzt

- die Tangente an die Kurve f_a im Kurvenpunkt $f_a(t)$ den Tangentialvektor $f_a'(t)$ als Richtungsvektor und
- die Ursprungsgerade durch den Kurvenpunkt $f_a(t)$ den Richtungsvektor $f_a(t)$ selbst;

für den Schnittwinkel $\alpha(t)$ ergibt sich demnach

$$\cos \alpha(t) = \frac{f_a'(t) \circ f_a(t)}{\|f_a'(t)\| \cdot \|f_a(t)\|}$$

mit

$$\begin{aligned} f_a'(t) \circ f_a(t) &= e^{at}\,(a\ \cos t - \sin t,\ a\ \sin t + \cos t) \circ e^{at}\,(\cos t,\ \sin t) \\ &= \left(e^{at}\right)^2 \big((a\ \cos t - \sin t) \cdot \cos t + (a\ \sin t + \cos t) \cdot \sin t\big) \\ &= \left(e^{at}\right)^2 \big((a\ \cos^2 t - \sin t \cos t) + (a\ \sin^2 t + \cos t\ \sin t)\big) \\ &= \left(e^{at}\right)^2 a \left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) \\ &= a \left(e^{at}\right)^2, \end{aligned}$$

also

$$\cos \alpha(t) = \frac{f_a'(t) \circ f_a(t)}{\|f_a'(t)\| \cdot \|f_a(t)\|} = \frac{a\,(e^{at})^2}{e^{at}\sqrt{a^2+1} \cdot e^{at}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}.$$

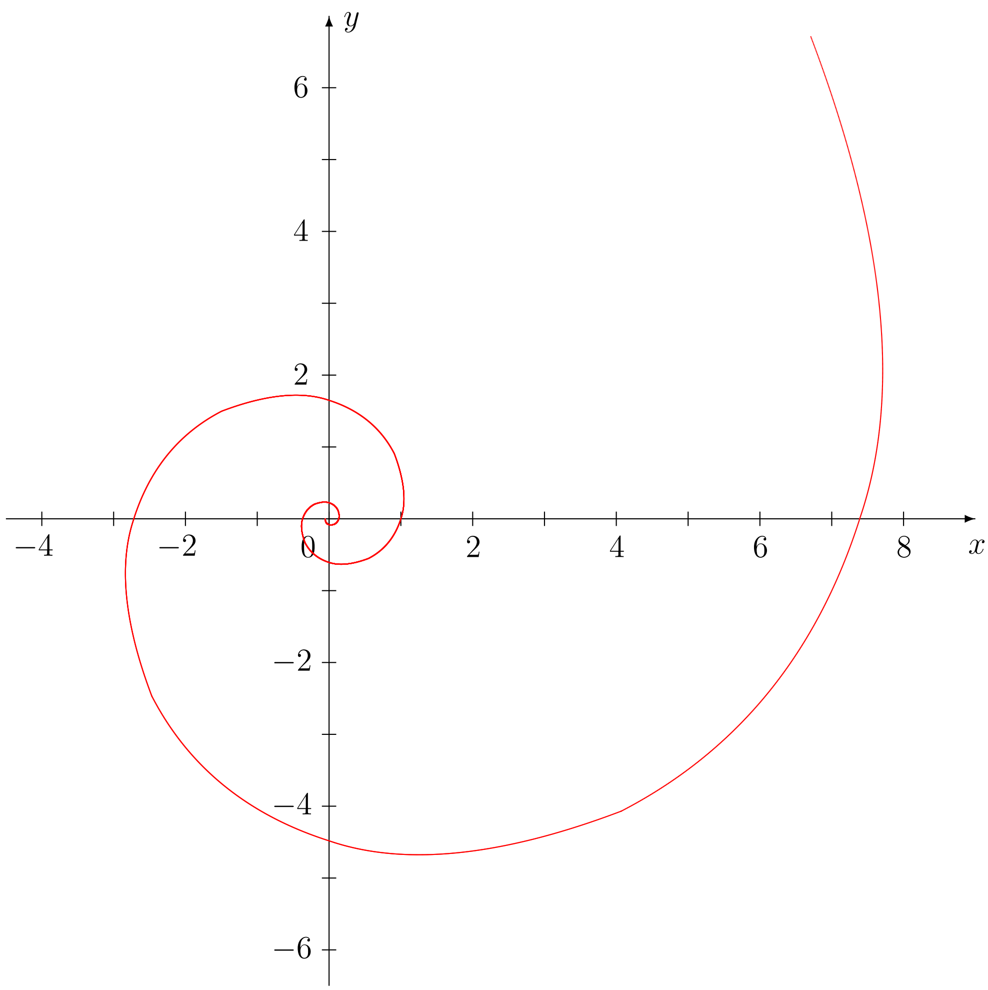
Folglich ist $\cos \alpha(t)$ und damit auch der Schnittwinkel $\alpha = \alpha(t)$ selbst unabhängig von t; für diesen gilt ferner

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}\right)^2 = 1 - \frac{a^2}{a^2+1} = \frac{1}{a^2+1},$$

wegen $\alpha \in [0; \pi]$ also

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \qquad \text{und damit} \qquad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = a.$$

b) Mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse erhält man für die Bildmenge K_a der Kurve f_a für den Parameterwert $a = \frac{1}{\pi}$ die folgende Skizze:



c) Gemäß a) ist die f_a auf dem Intervall $[T; 0]$ mit $T < 0$ rektifizierbar, und für ihre Bogenlänge gilt

$$L_a(T) = \int_T^0 \|f_a'(t)\|\,dt = \int_T^0 e^{at}\sqrt{a^2+1}\,dt = \sqrt{a^2+1}\cdot\int_T^0 e^{at}\,dt =$$
$$= \sqrt{a^2+1}\cdot\left[\frac{e^{at}}{a}\right]_T^0 = \frac{1}{a}\sqrt{a^2+1}\cdot\left(e^{a\cdot 0} - e^{a\cdot T}\right) = \frac{1}{a}\sqrt{a^2+1}\cdot\left(1 - e^{a\cdot T}\right);$$

damit ergibt sich wegen $a > 0$ für den Grenzwert

$$\lim_{T\to-\infty} L_a(T) = \lim_{T\to-\infty} \frac{1}{a}\sqrt{a^2+1}\cdot\bigl(1 - \underbrace{e^{a\cdot T}}_{\to 0}\bigr) = \frac{1}{a}\sqrt{a^2+1}.$$