

Tutorium zur Vorlesung „Differential- und Integralrechnung II“ — Bearbeitungsvorschlag —

41. Wir bestimmen zunächst die Schnittpunkte der gegebenen Kurve

$$f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(t) = (x(t), y(t)) = \left(\frac{t^6}{6}, 2 - \frac{t^4}{4} \right).$$

mit den beiden Koordinatenachsen:

- Für den Schnittpunkt S_y mit der y -Achse gilt

$$x(t) = 0 \iff \frac{t^6}{6} = 0 \iff t^6 = 0 \iff t = 0;$$

damit ergibt sich $y(0) = 2$ und folglich $S_y = (0; 2)$.

- Für den Schnittpunkt S_x mit der x -Achse gilt

$$y(t) = 0 \iff 2 - \frac{t^4}{4} = 0 \iff t^4 = 8 \iff t = \sqrt[4]{8};$$

damit ergibt sich $x(\sqrt[4]{8}) = \frac{1}{6} (\sqrt[4]{8})^6 = \frac{1}{6} \sqrt{2}^9$ und folglich $S_x = \left(\frac{1}{6} \sqrt{2}^9; 0 \right)$.

Des weiteren ist die Kurve f stetig differenzierbar mit

$$f'(t) = (t^5, -t^3)$$

und damit

$$\begin{aligned} \|f'(t)\| &= \sqrt{(t^5)^2 + (-t^3)^2} = \sqrt{t^{10} + t^6} = \sqrt{t^6(t^4 + 1)} = \\ &= \sqrt{t^6} \cdot \sqrt{t^4 + 1} = |t^3| \cdot \sqrt{t^4 + 1} \stackrel{t \geq 0}{=} t^3 \cdot \sqrt{t^4 + 1} \end{aligned}$$

für alle $t \in [0, \infty[$; insbesondere ist die Kurve f auf dem Intervall $[0; \sqrt[4]{8}]$ rektifizierbar, und unter Verwendung der Substitution

$$u = g(t) = t^4 + 1 \quad \text{mit} \quad \frac{du}{dt} = 4t^3, \quad \text{also} \quad du = 4t^3 dt,$$

ergibt sich für ihre Bogenlänge zwischen den Schnittpunkten mit den beiden Koordinatenachsen dann

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\sqrt[4]{8}} \|f'(t)\| dt = \int_0^{\sqrt[4]{8}} t^3 \cdot \sqrt{t^4 + 1} dt = \frac{1}{4} \int_0^{\sqrt[4]{8}} \sqrt{t^4 + 1} \cdot 4t^3 dt = \\ &= \frac{1}{4} \int_{g(0)}^{g(\sqrt[4]{8})} \sqrt{u} du = \frac{1}{4} \int_1^9 u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{4} \left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^9 = \frac{9^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}}{6} = \frac{27 - 1}{6} = \frac{13}{3}. \end{aligned}$$

42. a) Die Funktion

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = \frac{x}{2} \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2} \ln \left(x + \sqrt{1+x^2} \right),$$

ist (als Summe und Verkettung differenzierbarer Funktionen) selbst differenzierbar; für die Ableitung des ersten Summanden

$$F_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F_1(x) = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{1+x^2}$$

verwenden wir die Produktregel und (für die Ableitung des zweiten Faktors) die Kettenregel und erhalten

$$F_1'(x) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1+x^2} + \frac{x}{2} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x \right) = \frac{1}{2} \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{2\sqrt{1+x^2}}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$; für die Ableitung des zweiten Summanden

$$F_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F_2(x) = \frac{1}{2} \ln \left(x + \sqrt{1+x^2} \right)$$

verwenden wir dann (zweimal) die Kettenregel und erhalten

$$\begin{aligned} F_2'(x) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot (2x) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Insgesamt erhalten wir also

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left(\frac{1}{2} \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{2\sqrt{1+x^2}} \right) + \left(\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2+1}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2} \sqrt{1+x^2} + \frac{\sqrt{1+x^2}^2}{2\sqrt{1+x^2}} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2} \sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+x^2} = f(x) \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$; damit ist F eine Stammfunktion der Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{1+x^2}.$$

b) Die gegebene Kurve

$$\gamma : [0; 6\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = t \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \cdot \cos t \\ t \cdot \sin t \end{pmatrix},$$

besitzt die beiden stetig differenzierbaren Koordinatenfunktionen

$$\gamma_1 : [0; 6\pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \gamma_1(t) = t \cdot \cos t,$$

mit

$$\gamma_1'(t) = 1 \cdot \cos t + t \cdot (-\sin t) = \cos t - t \sin t$$

für alle $t \in [0; 6\pi]$ und

$$\gamma_2 : [0; 6\pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \gamma_2(t) = t \cdot \sin t,$$

mit

$$\gamma_2'(t) = 1 \cdot \sin t + t \cdot \cos t = \sin t + t \cos t$$

für alle $t \in [0; 6\pi]$; folglich ist γ eine stetig differenzierbare Kurve, und für alle $t \in [0; 6\pi]$ gilt

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t - t \sin t \\ \sin t + t \cos t \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} \|\gamma'(t)\|^2 &= \gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2 = (\cos t - t \sin t)^2 + (\sin t + t \cos t)^2 = \\ &= (\cos^2 t - 2 \cos t \cdot t \sin t + t^2 \sin^2 t) + (\sin^2 t + 2 \sin t \cdot t \cos t + t^2 \cos^2 t) = \\ &= \underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_{=1} + t^2 \underbrace{(\sin^2 t + \cos^2 t)}_{=1} = 1 + t^2 \end{aligned}$$

und damit

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + t^2} = f(t).$$

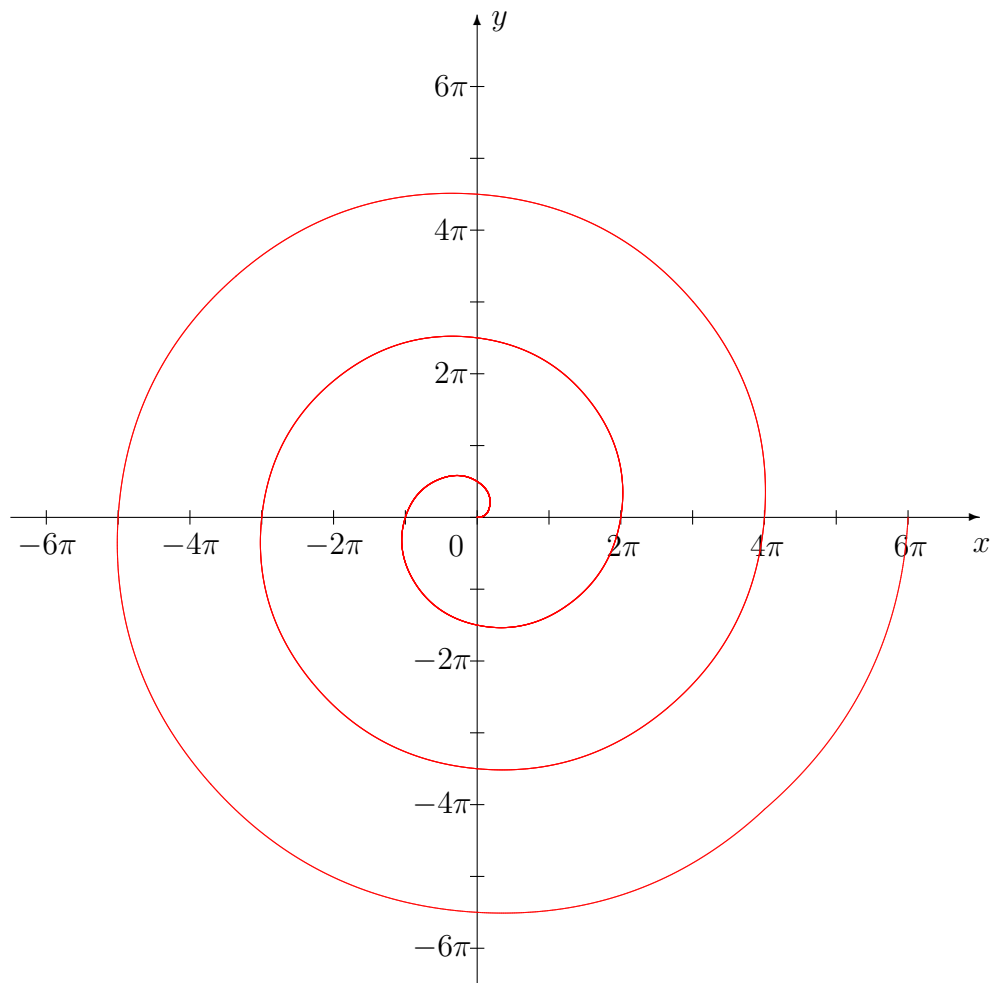
Die stetig differenzierbare Kurve γ ist insbesondere rektifizierbar, und für ihre Bogenlänge L gilt

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{6\pi} \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^{6\pi} f(t) dt = [F(t)]_0^{6\pi} = F(6\pi) - F(0) = \\ &= \left(\frac{6\pi}{2} \sqrt{1 + (6\pi)^2} + \frac{1}{2} \ln \left(6\pi + \sqrt{1 + (6\pi)^2} \right) \right) - \\ &\quad - \left(\frac{0}{2} \sqrt{1 + 0^2} + \frac{1}{2} \ln \left(0 + \sqrt{1 + 0^2} \right) \right) = \\ &= 3\pi \sqrt{1 + 36\pi^2} + \frac{1}{2} \ln \left(6\pi + \sqrt{1 + 36\pi^2} \right). \end{aligned}$$

c) Für die Skizze der Bildmenge

$$\gamma([0; 6\pi]) = \{\gamma(t) \mid 0 \leq t \leq 6\pi\}$$

kann man zunächst für einige Werte von t , etwa den Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$, den Kurvenpunkt $\gamma(t)$ und den Tangentialvektor $\gamma'(t)$ berechnen und in das Koordinatensystem eintragen, um dann die entstehende Spirale zu zeichnen:



43. a) Die Kurve $K : [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $K(t) = (\varphi(t), \psi(t))$, mit

$$\varphi(t) = t - \sin t \quad \text{und} \quad \psi(t) = 1 - \cos t$$

ist stetig differenzierbar mit

$$\varphi'(t) = 1 - \cos t \quad \text{und} \quad \psi'(t) = \sin t$$

und damit

$$\begin{aligned} \|K'(t)\| &= \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} = \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} = \\ &= \sqrt{1 - 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} \stackrel{\cos^2 t + \sin^2 t = 1}{=} \sqrt{2(1 - \cos t)} = \\ &= \sqrt{1 - \cos t = 2 \sin^2 \frac{t}{2}} \sqrt{4 \sin^2 \frac{t}{2}} = 2 \left| \sin \frac{t}{2} \right| \stackrel{0 \leq \frac{t}{2} \leq \pi}{=} 2 \sin \frac{t}{2} \end{aligned}$$

für alle $t \in [0; 2\pi]$; folglich ist γ rektifizierbar, und für ihre Länge L gilt

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \|K'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} 2 \sin \frac{t}{2} dt = \left[2 \cdot \frac{-\cos \frac{t}{2}}{\frac{1}{2}} \right]_0^{2\pi} = \\ &= -4 \cdot \left[\cos \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = -4 \cdot (\cos \pi - \cos 0) = -4 \cdot ((-1) - 1) = 8. \end{aligned}$$

b) Die erste Koordinatenfunktion

$$\varphi : [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = t - \sin t,$$

ist wegen $\varphi'(t) = 1 - \cos t > 0$ für alle $t \in]0; 2\pi[$ streng monoton wachsend mit dem Wertebereich $W_x = [\varphi(0); \varphi(2\pi)] = [0; 2\pi]$; damit tritt aber jedes $x \in [0; 2\pi]$ für genau ein $t \in \mathbb{R}$ auf, nämlich für

$$x = \varphi(t) \iff t = \varphi^{-1}(x),$$

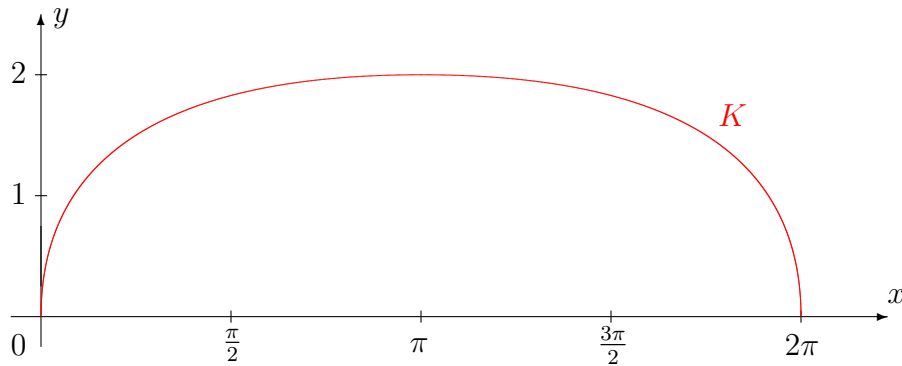
und das dazugehörige $y \in \mathbb{R}$ ist dann

$$y = \psi(t) = \psi(\varphi^{-1}(x)).$$

Folglich beschreibt die Kurve K den Graphen der Funktion

$$f : [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x)),$$

und es ist $f(\varphi(t)) = \psi(t)$ für alle $t \in [0; 2\pi]$.



Für den Inhalt A der Fläche, die von der Kurve und der x -Achse eingeschlossen wird, ergibt sich demnach mit Hilfe der Substitutionsregel

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(2\pi)} f(x) dx = \int_0^{2\pi} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \psi(t) \varphi'(t) dt = \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos t + \cos^2 t) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2 \cos t + \frac{\cos(2t)}{2} \right) dt = \left[\frac{3}{2} t - 2 \sin t + \frac{\sin(2t)}{4} \right]_0^{2\pi} = \\ &= \left(\frac{3}{2} \cdot 2\pi - 2 \underbrace{\sin(2\pi)}_{=0} + \frac{\sin(4\pi)}{4} \right) - \left(0 - 2 \underbrace{\sin 0}_{=0} + \frac{\sin 0}{4} \right) = 3\pi; \end{aligned}$$

dabei geht die für alle $t \in \mathbb{R}$ gültige Beziehung $\cos^2 t = \frac{1}{2} (1 + \cos(2t))$ ein.

44. a) Das Dreieck Δ mit den Ecken $(0, -1)$, $(1, 0)$ und $(0, 1)$ besteht genau aus denjenigen Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit

$$x \geq 0 \quad \text{und} \quad y \leq 1 - x \quad \text{und} \quad y \geq x - 1.$$

Wir weisen diese drei Eigenschaften für jeden Kurvenpunkt $k(t) = (x, y)$ mit $t \in [0; 1]$ nach; dabei ist $x = 2t(1 - t)$ und $y = 1 - 2t$.

- Wegen $0 \leq t \leq 1$ ist $1 \geq 1 - t \geq 0$ und damit

$$x = 2 \cdot \underbrace{t}_{\geq 0} \cdot \underbrace{(1 - t)}_{\geq 0} \geq 0.$$

- Wegen

$$\begin{aligned} y - (1 - x) &= (1 - 2t) - (1 - 2t(1 - t)) = \\ &= 1 - 2t - 1 + 2t - 2t^2 = -2t^2 \leq 0 \end{aligned}$$

ist $y \leq 1 - x$.

- Wegen

$$\begin{aligned} y - (x - 1) &= (1 - 2t) - (2t(1 - t) - 1) = \\ &= 1 - 2t - 2t + 2t^2 + 1 = 2(t^2 - 2t + 1) = 2(t - 1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

ist $y \geq x - 1$.

Damit liegt der Kurvenpunkt $k(t)$ mit $t \in [0; 1]$ in Δ .

- b) Wir verschaffen uns zunächst einen Überblick über die Gestalt der Kurve k . Die zweite Koordinatenfunktion

$$k_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad k_2(t) = 1 - 2t,$$

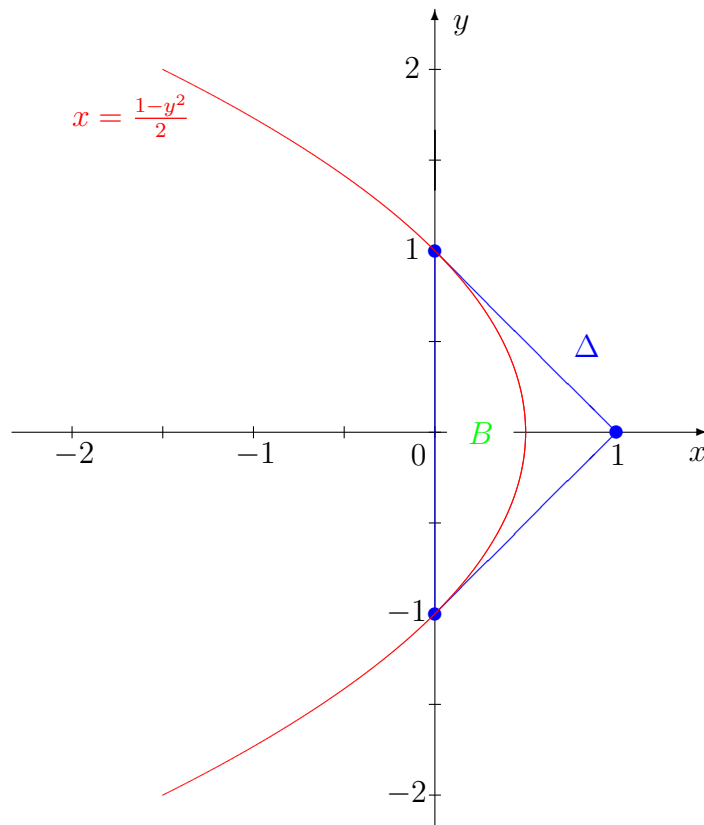
ist streng monoton fallend mit $W_{k_2} = \mathbb{R}$; damit tritt jedes $y \in \mathbb{R}$ für genau ein $t \in \mathbb{R}$ auf, nämlich für

$$y = 1 - 2t \iff t = \frac{1 - y}{2},$$

und das dazugehörige x ist dann

$$\begin{aligned} x = 2t(1 - t) &= 2 \cdot \frac{1 - y}{2} \cdot \left(1 - \frac{1 - y}{2}\right) = \\ &= (1 - y) \cdot \frac{2 - (1 - y)}{2} = (1 - y) \cdot \frac{1 + y}{2} = \frac{1 - y^2}{2}. \end{aligned}$$

Damit beschreibt k den nach links geöffneten Parabelbogen mit dem Scheitelpunkt $(\frac{1}{2}, 0)$ durch die beiden Ecken $(0, -1)$ und $(0, 1)$ des Dreiecks Δ .



Wegen

$$x = \frac{1-y^2}{2} \iff 2x = 1-y^2 \iff y^2 = 1-2x \iff y = \pm\sqrt{1-2x}$$

ist der von der Kurve und der y -Achse eingeschlossene Bereich

$$B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ und } -\sqrt{1-2x} \leq y \leq \sqrt{1-2x} \right\}.$$

Für seine Fläche A_B gilt demnach aus Symmetriegründen

$$\begin{aligned} A_B &= 2 \cdot \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-2x} \, dx = 2 \cdot \int_0^{\frac{1}{2}} (1-2x)^{\frac{1}{2}} \, dx = 2 \cdot \left[\frac{(1-2x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2} \cdot (-2)} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \\ &= -\frac{2}{3} \cdot \left[\left(1-2 \cdot \frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - (1-2 \cdot 0)^{\frac{3}{2}} \right] = -\frac{2}{3} \cdot (0-1) = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$