

**Tutorium zur Vorlesung
„Differential- und Integralrechnung II“
— Bearbeitungsvorschlag —**

21. Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, ist als Verkettung des Cosinus und einer linearen Funktion beliebig oft differenzierbar; mit der Kettenregel erhält man

- $f'(x) = -\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot 1 = -\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$,
- $f''(x) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot 1 = -\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ und
- $f'''(x) = -\left(-\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) \cdot 1 = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Wegen

$$f(0) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad f'(0) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad f''(0) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ergibt sich für das zweite Taylorpolynom T_2 von f zum Entwicklungspunkt $a = 0$ dann

$$T_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{x^2}{2\sqrt{2}}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Nach der Taylorformel gilt nun $f(x) = T_2(x) + R_3(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, insbesondere also $f(1) = T_2(1) + R_3(1)$, wobei es gemäß der Lagrangeschen Darstellung des Restgliedes ein ξ zwischen $a = 0$ und $x = 1$ mit

$$R_3(1) = \frac{f'''(\xi)}{3!} \cdot 1^3 = \frac{1}{6} f'''(\xi) = \frac{1}{6} \sin\left(\xi + \frac{\pi}{4}\right)$$

gibt; damit ergibt sich aber

$$\left| \cos\left(1 + \frac{\pi}{4}\right) - T_2(1) \right| = |f(1) - T_2(1)| = |R_3(1)| = \frac{1}{6} \cdot \underbrace{\left| \sin\left(\xi + \frac{\pi}{4}\right) \right|}_{\leq 1} \leq \frac{1}{6}.$$

22. a) Die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = (\pi - x) \cdot \cos x,$$

ist als Produkt einer linearen Funktion und des Cosinus beliebig oft differenzierbar, und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-1) \cdot \cos x + (\pi - x) \cdot (-\sin x) \\ &= -\cos x + (x - \pi) \cdot \sin x, \\ f''(x) &= -(-\sin x) + (1 \cdot \sin x + (x - \pi) \cdot \cos x) \\ &= 2 \sin x + (x - \pi) \cdot \cos x, \\ f'''(x) &= 2 \cos x + (1 \cdot \cos x + (x - \pi) \cdot (-\sin x)) \\ &= 3 \cos x + (\pi - x) \cdot \sin x. \end{aligned}$$

b) Im Entwicklungspunkt $a = \frac{\pi}{2}$ mit $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ und $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ gilt

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot 0 = 0, \\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -\cos \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - \pi\right) \cdot \sin \frac{\pi}{2} = 0 + \left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot 1 = -\frac{\pi}{2}, \\ f''\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 2 \sin \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - \pi\right) \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 2 \cdot 1 + \left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot 0 = 2, \end{aligned}$$

und für das Taylorpolynom T_2 von f ergibt sich damit

$$\begin{aligned} T_2(x) &= f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right) \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} f''\left(\frac{\pi}{2}\right) \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \\ &= 0 + \left(-\frac{\pi}{2}\right) \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \\ &= -\frac{\pi}{2} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 = x^2 - \frac{3\pi}{2}x + \frac{\pi^2}{2} \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

c) Nach der Taylorformel gilt $f(x) = T_2(x) + R_3(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, wobei es zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gemäß der Lagrangeschen Darstellung des Restgliedes ein ξ zwischen dem Entwicklungspunkt $a = \frac{\pi}{2}$ und x mit

$$R_3(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3$$

gibt; für jedes $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ aus dem symmetrisch zum Entwicklungspunkt $a = \frac{\pi}{2}$ liegenden Intervall $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ gilt $\left|x - \frac{\pi}{2}\right| \leq \frac{\pi}{4}$, und die Stelle ξ zwischen $\frac{\pi}{2}$ und x befindet sich ebenfalls im Intervall $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} |f'''(\xi)| &= |3 \cos \xi + (\pi - \xi) \cdot \sin \xi| \leq |3 \cos \xi| + |(\pi - \xi) \cdot \sin \xi| = \\ &= 3 \cdot \underbrace{|\cos \xi|}_{\leq 1} + \underbrace{|\pi - \xi|}_{\geq \frac{\pi}{4} > 0} \cdot \underbrace{|\sin \xi|}_{\leq 1} \leq 3 \cdot 1 + \underbrace{(\pi - \xi)}_{\leq \frac{3\pi}{4} \leq 3} \cdot 1 \leq 3 + 3 = 6 \end{aligned}$$

und folglich die Abschätzung

$$\begin{aligned} |f(x) - T_2(x)| &= |R_3(x)| = \left| \frac{f'''(\xi)}{3!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 \right| = \\ &= \frac{1}{6} \cdot \underbrace{|f'''(\xi)|}_{\leq 6} \cdot \underbrace{\left|x - \frac{\pi}{2}\right|^3}_{\leq \left(\frac{\pi}{4}\right)^3} \leq \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right)^3 = \frac{\pi^3}{64}. \end{aligned}$$

23. Die Funktion

$$f :]-1; \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{1+x},$$

ist auf $] -1; \infty[$ beliebig oft stetig differenzierbar, und für alle $x > -1$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^{\frac{1}{2}}, \\ f'(x) &= \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}, \\ f''(x) &= \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) (1+x)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}, \\ f'''(x) &= -\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) (1+x)^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}}. \end{aligned}$$

Damit ist

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad f''(0) = -\frac{1}{4},$$

und man erhält für das zweite Taylorpolynom T_2 von f zum Entwicklungspunkt $a = 0$ dann

$$T_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$$

für alle $x \in]-1; \infty[$. Nach der Taylorformel gilt $f(x) = T_2(x) + R_3(x)$ für alle $x \in]-1; \infty[$, wobei es zu jedem $x > -1$ gemäß der Lagrangeschen Darstellung ein ξ_x zwischen $a = 0$ und x mit $R_3(x) = \frac{f'''(\xi_x)}{3!}x^3$ gibt.

- a) Für $x \rightarrow 0$ ist auch $\xi_x \rightarrow 0$ und damit wegen der Stetigkeit der dritten Ableitung f''' von f auch $f'''(\xi_x) \rightarrow f'''(0) = \frac{3}{8}$, so daß sich insgesamt

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2}(f(x) - T_2(x)) &= \frac{1}{x^2} \cdot R_3(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{f'''(\xi_x)}{3!}x^3 = \\ &= \frac{1}{6} \cdot \underbrace{f'''(\xi_x)}_{\rightarrow \frac{3}{8}} \cdot \underbrace{x}_{\rightarrow 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{8} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

ergibt; wir können daher $p_2 = T_2$ wählen.

- b) Für $x \in [0; \infty[$ ist auch $\xi_x \in [0; \infty[$, und wir erhalten

$$\begin{aligned} |f(x) - p_2(x)| &\stackrel{p_2=T_2}{=} |f(x) - T_2(x)| = |R_3(x)| = \left| \frac{f'''(\xi_x)}{3!}x^3 \right| = \\ &= \frac{1}{6} \cdot |f'''(\xi_x)| \cdot |x|^3 \stackrel{x \geq 0}{=} \frac{1}{6} \cdot \left| \frac{3}{8}(1+\xi_x)^{-\frac{5}{2}} \right| \cdot x^3 \stackrel{1+\xi_x \geq 1}{\leq} \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{8}x^3 = \frac{1}{16}x^3. \end{aligned}$$

24. a) Die zu betrachtende Funktion

$$f :]-1; \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x e^x - e^{-x},$$

ist als Differenz und Produkt einer linearen Funktion und der Exponentialfunktion differenzierbar, und für alle $x > -1$ gilt

$$f'(x) = (1 \cdot e^x + x \cdot e^x) - e^{-x} \cdot (-1) = \underbrace{(1+x)}_{>0} \cdot \underbrace{e^x}_{>0} + \underbrace{e^{-x}}_{>0} > 0;$$

damit ist f streng monoton steigend, insbesondere umkehrbar, und die Umkehrfunktion $g = f^{-1} : W_f \rightarrow \mathbb{R}$ ist wegen $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in]-1, \infty[$ differenzierbar.

b) Für $a = 0$ ist $a \in]-1, \infty[$ mit

$$b = f(a) = 0 \cdot e^0 - e^{-0} = -1, \quad \text{also} \quad g(-1) = f^{-1}(b) = a = 0,$$

und für die Ableitung der Umkehrfunktion $g = f^{-1}$ ergibt sich

$$g'(-1) = (f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{(1+0) \cdot e^0 + e^{-0}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Für das Taylorpolynom ersten Grades T_1 von g um den Entwicklungspunkt $b = -1$ gilt demnach

$$\begin{aligned} T_1(x) &= g(b) + g'(b) \cdot (x - b) = \\ &= g(-1) + g'(-1) \cdot (x - (-1)) = \\ &= 0 + \frac{1}{2} \cdot (x + 1) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$