

**Tutorium zur Vorlesung  
„Differential- und Integralrechnung II“  
— Bearbeitungsvorschlag —**

17. Für alle  $t \in \mathbb{R}$  gilt

$$\sin^3 t = \sin^2 t \cdot \sin t = (1 - \cos^2 t) \cdot \sin t = (\cos^2 t - 1) \cdot (-\sin t),$$

so daß sich mit der Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 - 1,$$

und der Substitution

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(t) = \cos t, \quad \text{mit} \quad g'(t) = -\sin t$$

dann

$$\begin{aligned} \int \sin^3 t \, dt &= \int (\cos^2 t - 1) \cdot (-\sin t) \, dt = \int f(g(t)) \cdot g'(t) \, dt = \\ &= \int f(x) \, dx = \int (x^2 - 1) \, dx = \frac{x^3}{3} - x + C = \frac{\cos^3 t}{3} - \cos t + C \end{aligned}$$

ergibt. Des weiteren ist

$$\int_{\pi^2}^{4\pi^2} \sin \sqrt{t} \, dt = \int_{\pi^2}^{4\pi^2} 2\sqrt{t} \sin \sqrt{t} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} \, dt;$$

die Substitutionsregel liefert für

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x \sin x,$$

sowie

$$g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(t) = \sqrt{t}, \quad \text{mit} \quad g'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

für alle  $t \in \mathbb{R}^+$  damit

$$\begin{aligned}
 \int_{\pi^2}^{4\pi^2} \sin \sqrt{t} \, dt &= \int_{\pi^2}^{4\pi^2} f(g(t)) \cdot g'(t) \, dt = \int_{g(\pi^2)}^{g(4\pi^2)} f(x) \, dx \\
 &= \int_{\pi}^{2\pi} 2x \cdot \sin x \, dx = 2 \cdot \int_{\pi}^{2\pi} \underbrace{x}_{u(x)} \cdot \underbrace{\sin x}_{v'(x)} \, dx \\
 &= 2 \cdot \left( \left[ \underbrace{x}_{u(x)} \cdot \underbrace{(-\cos x)}_{v(x)} \right]_{\pi}^{2\pi} - \int_{\pi}^{2\pi} \underbrace{1}_{u'(x)} \cdot \underbrace{(-\cos x)}_{v(x)} \, dx \right) \\
 &= 2 \cdot \left( \left[ 2\pi \cdot \underbrace{(-\cos 2\pi)}_{=1} - \pi \cdot \underbrace{(-\cos \pi)}_{=-1} \right] + \int_{\pi}^{2\pi} \cos x \, dx \right) \\
 &= 2 \cdot \left( \left[ -2\pi - \pi \right] + \left[ \sin x \right]_{\pi}^{2\pi} \right) \\
 &= 2 \cdot \left( -3\pi + \left[ \underbrace{\sin 2\pi}_{=0} - \underbrace{\sin \pi}_{=0} \right] \right) = -6\pi.
 \end{aligned}$$

18. Wir versuchen, eine Stammfunktion zu

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2} \cdot \ln x,$$

mittels partieller Integration mit  $u'(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$  und  $v(x) = \ln x$  zu ermitteln; für die dazu notwendige Bestimmung von  $u(x)$  verwenden wir die Substitution  $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(t) = 1+t^2$ , mit  $g'(t) = 2t$  für alle  $t \in \mathbb{R}^+$  und erhalten mit der Substitutionsregel

$$\begin{aligned}
 \int u'(t) \, dt &= \int \frac{t}{(1+t^2)^2} \, dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{(g(t))^2} \cdot g'(t) \, dt = \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2} \, dx = \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{x} \right) + C = -\frac{1}{2(1+t^2)} + C.
 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \int f(x) \, dx &= \int \underbrace{\frac{x}{(1+x^2)^2}}_{u'(x)} \cdot \underbrace{\ln x}_{v(x)} \, dx = \\
 &= \underbrace{\frac{1}{2(1+x^2)}}_{u(x)} \cdot \underbrace{\ln x}_{v(x)} - \int \underbrace{\frac{1}{2(1+x^2)}}_{u(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{v'(x)} \, dx = \\
 &= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{(1+x^2) \cdot x} \, dx.
 \end{aligned}$$

Das nun entstandene Integral behandeln wir mit Hilfe der Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{(1+x^2)x} = \frac{\alpha x + \beta}{1+x^2} + \frac{\gamma}{x}$$

mit geeigneten Konstanten  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ; wegen

$$\frac{\alpha x + \beta}{1 + x^2} + \frac{\gamma}{x} = \frac{(\alpha x + \beta)x + \gamma(1 + x^2)}{(1 + x^2)x} = \frac{(\alpha + \gamma)x^2 + \beta x + \gamma}{(1 + x^2)x}$$

liefert der Koeffizientenvergleich  $\alpha + \gamma = 0$ ,  $\beta = 0$  und  $\gamma = 1$ , also  $\alpha = -1$ . Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(1 + x^2) \cdot x} dx &= \int \left( \frac{-x}{1 + x^2} + \frac{1}{x} \right) dx = -\frac{1}{2} \int \frac{2x}{1 + x^2} dx + \int \frac{1}{x} dx = \\ &= -\frac{1}{2} \ln |1 + x^2| + \ln |x| + C = -\frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + \ln x + C \end{aligned}$$

sowie insgesamt

$$\int f(x) dx = -\frac{\ln x}{2(1 + x^2)} - \frac{1}{4} \ln(1 + x^2) + \frac{1}{2} \ln x + C.$$

Damit ist etwa

$$F: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = -\frac{\ln x}{2(1 + x^2)} - \frac{1}{4} \ln(1 + x^2) + \frac{1}{2} \ln x$$

eine Stammfunktion von  $f$ .

19. a) Die Funktion

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+a}} = x^{-\frac{1}{2}} - (x+a)^{-\frac{1}{2}},$$

ist differenzierbar mit

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{3}{2}} - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (x+a)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{x+a}^3} - \frac{1}{\sqrt{x}^3} \right) < 0$$

für alle  $x > 0$ ; folglich ist  $f$  streng monoton fallend. Für das Verhalten von  $f$  am Rande des Definitionsbereichs ergibt sich

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}}_{\rightarrow \infty} - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x+a}}}_{\rightarrow \frac{1}{\sqrt{a}}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \infty \quad \text{und} \quad f(x) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}}_{\rightarrow 0} - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x+a}}}_{\rightarrow 0} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0.$$

b) Es ist

$$F: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \frac{(x+a)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2(\sqrt{x} - \sqrt{x+a})$$

eine Stammfunktion von  $f$ .

c) Wir untersuchen zunächst die beiden uneigentlichen Integrale  $\int_0^1 f(x) dx$  und

$\int_1^\infty f(x) dx$  jeweils auf Konvergenz:

- Für alle  $0 < \alpha < 1$  gilt

$$\int_{\alpha}^1 f(x) dx = F(1) - F(\alpha) = F(1) - 2 \left( \underbrace{\sqrt{\alpha}}_{\rightarrow \sqrt{0}} - \underbrace{\sqrt{\alpha+a}}_{\rightarrow \sqrt{0+a}} \right) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0^+} \\ \rightarrow F(1) - 2(0 - \sqrt{a}) = F(1) + 2\sqrt{a};$$

damit konvergiert das uneigentliche Integral 2. Art  $\int_0^1 f(x) dx$ , und sein

Wert ist  $\int_0^1 f(x) dx = F(1) + 2\sqrt{a}$ .

- Für alle  $1 < \beta$  gilt

$$\int_1^{\beta} f(x) dx = F(\beta) - F(1) = 2 \left( \sqrt{\beta} - \sqrt{\beta+a} \right) - F(1) = \\ = 2 \cdot \frac{\beta - (\beta+a)}{\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta+a}} - F(1) = - \underbrace{\frac{2a}{\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta+a}}}_{\rightarrow 0} - F(1) \xrightarrow{\beta \rightarrow \infty} -F(1);$$

damit konvergiert das uneigentliche Integral 1. Art  $\int_1^{\infty} f(x) dx$ , und sein

Wert ist  $\int_1^{\infty} f(x) dx = -F(1)$ .

Folglich konvergiert das zu untersuchende uneigentliche Integral  $\int_0^{\infty} f(x) dx$ , und für seinen Wert gilt

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^{\infty} f(x) dx = (F(1) + 2\sqrt{a}) - F(1) = 2\sqrt{a}.$$

20. Wir bestimmen das Konvergenzverhalten der gegebenen Reihen

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \quad \text{und} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n \sqrt{n}}$$

mit Hilfe des Integralvergleichskriteriums und betrachten dazu die beiden Funktionen

$$f : [2; \infty[ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x \ln x},$$

und

$$g : [2; \infty[ \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{\ln x}{x \sqrt{x}} = x^{-\frac{3}{2}} \ln x.$$

- Für alle  $2 \leq x_1 \leq x_2$  ist  $0 < \ln 2 \leq \ln x_1 \leq \ln x_2$  und damit

$$0 < x_1 \ln x_1 \leq x_2 \ln x_2 \quad \text{sowie} \quad f(x_1) = \frac{1}{x_1 \ln x_1} \geq \frac{1}{x_2 \ln x_2} = f(x_2),$$

weswegen  $f$  monoton fallend ist; ferner gilt  $f(x) \geq 0$  für alle  $x \geq 2$ . Wegen

$$\int_2^b f(x) dx = \int_2^b \frac{1}{\ln x} dx = [\ln |\ln x|]_2^b = \underbrace{\ln |\ln b|}_{\rightarrow \infty} - \ln(\ln 2) \xrightarrow{b \rightarrow \infty} \infty;$$

ist das uneigentliche Integral  $\int_2^\infty f(x) dx$  nicht konvergent, so daß auch die

Reihe  $\sum_{n=2}^\infty f(n)$ , also  $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n \ln n}$ , divergiert.

- Die Funktion  $g$  ist als Produkt einer Potenzfunktion und des Logarithmus differenzierbar, und es gilt

$$g'(x) = -\frac{3}{2} x^{-\frac{5}{2}} \cdot \ln x + x^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{x} = \left(1 - \frac{3}{2} \ln x\right) \cdot x^{-\frac{5}{2}} \leq 0$$

für alle  $x \geq 2$ , weswegen  $g$  monoton fallend ist; ferner gilt  $g(x) \geq 0$  für alle  $x \geq 2$ . Mit Hilfe der in der Vorlesung (durch partielle Integration) ermittelten Stammfunktion

$$G : [2, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}, \quad G(x) = \frac{x^{r+1}}{(r+1)^2} ((r+1) \ln x - 1) \Big|_{r=-\frac{3}{2}} = -\frac{2(2 + \ln x)}{\sqrt{x}},$$

erhält man

$$\int_2^b g(x) dx = \left[ -\frac{2(2 + \ln x)}{\sqrt{x}} \right]_2^b = -\frac{2(2 + \ln b)}{\sqrt{b}} + \sqrt{2}(2 + \ln 2);$$

nach der Regel von de l'Hospital gilt

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{2(2 + \ln b)}{\sqrt{b}} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot \frac{1}{b}}{\frac{1}{2\sqrt{b}}} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{4\sqrt{b}}{b} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{b}} = 0$$

und damit

$$\int_2^\infty g(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b g(x) dx = \sqrt{2}(2 + \ln 2).$$

Folglich ist das uneigentliche Integral  $\int_2^\infty g(x) dx$  konvergent, so daß auch

die Reihe  $\sum_{n=2}^\infty g(n)$ , also  $\sum_{n=2}^\infty \frac{\ln n}{n \sqrt{n}}$ , konvergiert.