

Tutorium zur Vorlesung
„Differential– und Integralrechnung II“
— Bearbeitungsvorschlag —

13. a) Die Funktion

$$F : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = \sqrt{g(x)},$$

ist als Hintereinanderausführung der beiden stetig differenzierbaren Funktionen

$$h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = \sqrt{x}, \quad \text{und} \quad g : D \rightarrow \mathbb{R}$$

selbst stetig differenzierbar; nach der Kettenregel gilt dabei

$$F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$$

für alle $x \in D$; nach dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung ist damit F eine Stammfunktion von $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$, und wir erhalten

$$\int \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}} dx = 2 \int f(x) dx = 2 F(x) + C = 2 \sqrt{g(x)} + C.$$

b) Wir wenden jeweils die in a) entwickelte Integrationsregel an:

- Für $g_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g_1(x) = 1 + e^x$, mit $g_1'(x) = e^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ erhalten wir

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1 + e^x}} dx = \int \frac{g_1'(x)}{\sqrt{g_1(x)}} dx = 2 \sqrt{g_1(x)} + C = 2 \sqrt{1 + e^x} + C.$$

- Für $g_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g_2(x) = 1 + x^2$, mit $g_2'(x) = 2x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ erhalten wir

$$\int \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{g_2'(x)}{\sqrt{g_2(x)}} dx = \sqrt{g_2(x)} + C = \sqrt{1 + x^2} + C.$$

- Für $g_3 :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, $g_3(x) = 1 - x^2$, mit $g_3'(x) = -2x$ für alle $x \in]-1, 1[$ erhalten wir schließlich

$$\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{g_3'(x)}{\sqrt{g_3(x)}} dx = -\sqrt{g_3(x)} + C = -\sqrt{1 - x^2} + C.$$

- c) Die Funktion $\arcsin$ ist zwar auf $[-1, 1]$ definiert und dort stetig, aber nur auf dem offenen Intervall $] -1, 1[$ stetig differenzierbar; daher bestimmen wir die Stammfunktionen von $\arcsin$ zunächst nur auf der Definitionsmenge $] -1, 1[$.

$$\begin{aligned} \int \arcsin x \, dx &= \int \underbrace{1}_{v'(x)} \cdot \underbrace{\arcsin x}_{u(x)} \, dx = \\ &= \underbrace{x}_{v(x)} \cdot \underbrace{\arcsin x}_{u(x)} - \int \underbrace{x}_{v(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}_{u'(x)} \, dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \stackrel{b)}{=} \\ &= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C \end{aligned}$$

Aufgrund der Stetigkeit dieser Funktionen auf ganz $[-1, 1]$ (also insbesondere auch in den Punkten $a = -1$ und $b = 1$) ist diese Beziehung sogar auf dem abgeschlossenen Intervall $[-1, 1]$ gültig.

14. a) Wir bestimmen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)}$$

für alle $x \in [0; 1]$. Wegen

$$\frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x+2} = \frac{\alpha(x+2) + \beta(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{(\alpha+\beta)x + (2\alpha+\beta)}{(x+1)(x+2)}$$

liefert der Koeffizientenvergleich $\alpha + \beta = 0$ und $2\alpha + \beta = 1$, also $\alpha = 1$ und $\beta = -1$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x+1)(x+2)} \, dx &= \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) \, dx = \\ &= \int \frac{1}{x+1} \, dx - \int \frac{1}{x+2} \, dx = \ln|x+1| - \ln|x+2| + C = \ln \left| \frac{x+1}{x+2} \right| + C \end{aligned}$$

und damit

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)} \, dx = \left[\ln \left| \frac{x+1}{x+2} \right| \right]_0^1 = \ln \frac{2}{3} - \ln \frac{1}{2} = \ln \frac{4}{3}.$$

- b) Mit Hilfe der in a) gezeigten Partialbruchzerlegung ergibt sich für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+2} = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1; \end{aligned}$$

damit ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ konvergent, und für ihre Summe

gilt $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1.$

15. a) Es ist

$$\begin{aligned}\int \underbrace{x}_{u(x)} \cdot \underbrace{\sin x}_{v'(x)} dx &= \underbrace{x}_{u(x)} \cdot \underbrace{(-\cos x)}_{v(x)} - \int \underbrace{1}_{u'(x)} \cdot \underbrace{(-\cos x)}_{v(x)} dx = \\ &= -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C.\end{aligned}$$

b) Mit Hilfe des in a) ermittelten unbestimmten Integrals ergibt sich mit Hilfe partieller Integration

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \underbrace{x^2}_{u(x)} \cdot \underbrace{\cos x}_{v'(x)} dx &= \left[\underbrace{x^2}_{u(x)} \cdot \underbrace{\sin x}_{v(x)} \right]_0^\pi - \int_0^\pi \underbrace{2x}_{u'(x)} \cdot \underbrace{\sin x}_{v(x)} dx = \\ &= \left(\pi^2 \cdot \underbrace{\sin \pi}_{=0} - 0^2 \cdot \sin 0 \right) - 2 \int_0^\pi x \sin x dx \stackrel{\text{a)}}{=} -2 \left[-x \cos x + \sin x \right]_0^\pi = \\ &= -2 \left[\left(-\pi \cdot \underbrace{\cos \pi}_{=-1} + \underbrace{\sin \pi}_{=0} \right) - \left(-0 \cdot \cos 0 + \underbrace{\sin 0}_{=0} \right) \right] = -2\pi.\end{aligned}$$

16. Die gegebene Funktion

$$f :]-2, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = (x-1) \cdot \ln(x+2),$$

besitzt wegen

$$\begin{aligned}f(x) = 0 &\iff (x-1) \cdot \ln(x+2) = 0 \\ &\iff (x-1 = 0 \text{ oder } \ln(x+2) = 0) \\ &\iff (x-1 = 0 \text{ oder } x+2 = 1) \\ &\iff (x = 1 \text{ oder } x = -1)\end{aligned}$$

für alle $x \in]-2, \infty[$ genau zwei Nullstellen, nämlich $a = -1$ und $b = 1$; dabei verläuft der Graph G_f zwischen den beiden Nullstellen wegen

$$f(x) = \underbrace{(x-1)}_{<0} \cdot \underbrace{\ln(x+2)}_{\substack{>1 \\ >\ln 1=0}} < 0$$

für alle $x \in]-1, 1[$ unterhalb der x -Achse. Für den gesuchten Inhalt A der vom Graphen G_f und der x -Achse zwischen den beiden Nullstellen $a = -1$ und $b = 1$

eingeschlossenen Fläche gilt damit

$$\begin{aligned}
 A &= \int_a^b (0 - f(x)) \, dx = \int_{-1}^1 \underbrace{-(x-1)}_{u'(x)} \cdot \underbrace{\ln(x+2)}_{v(x)} \, dx \\
 &= \left[\underbrace{-\frac{(x-1)^2}{2}}_{u(x)} \cdot \underbrace{\ln(x+2)}_{v(x)} \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \underbrace{-\frac{(x-1)^2}{2}}_{u(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x+2}}_{v'(x)} \, dx \\
 &= \left(-\frac{0^2}{2} \cdot \ln 3 \right) - \left(-\frac{(-2)^2}{2} \cdot \ln 1 \right) + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{(x-1)^2}{x+2} \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{x^2 - 2x + 1}{x+2} \, dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{x(x+2) - 4(x+2) + 9}{x+2} \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(x - 4 + \frac{9}{x+2} \right) \, dx = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{x^2}{2} - 4x + 9 \ln(x+2) \right]_{-1}^1 \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{1^2}{2} - 4 + 9 \ln 3 \right) - \left(\frac{(-1)^2}{2} + 4 + 9 \ln 1 \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{1}{2} - 4 + 9 \ln 3 \right) - \left(\frac{1}{2} + 4 \right) \right] = \frac{9}{2} \ln 3 - 4.
 \end{aligned}$$