

Tutorium zur Vorlesung „Differential- und Integralrechnung II“ — Bearbeitungsvorschlag —

9. a) Wegen

$$f(x) = 0 \iff 3x(x-1)^2 = 0 \iff x = 0 \text{ oder } x = 1$$

besitzt f genau die beiden Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$. Wegen

$$f(x) = \underbrace{3x}_{<0} \cdot \underbrace{(x-1)^2}_{>0} < 0$$

für alle $x < 0$ verläuft G_f im Bereich $]-\infty; 0[$ unterhalb der x -Achse, und wegen

$$f(x) = \underbrace{3x}_{>0} \cdot \underbrace{(x-1)^2}_{>0} > 0$$

für alle $x > 0$ mit $x \neq 1$ verläuft G_f in den Bereichen $]0; 1[$ und $]1; \infty[$ jeweils oberhalb der x -Achse. Ferner ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ als Polynomfunktion beliebig oft differenzierbar, und wegen $f(x) = 3x^3 - 6x^2 + 3x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f'(x) = 9x^2 - 12x + 3 \quad \text{und} \quad f''(x) = 18x - 12.$$

Als Kandidaten für lokale Extremstellen von f kommen hier also nur die Nullstellen von f' in Frage, und es gilt

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\implies 9x^2 - 12x + 3 = 0 \implies 3x^2 - 4x + 1 = 0 \implies \\ x &= \frac{1}{2 \cdot 3} \left(-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1} \right) = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6}, \end{aligned}$$

also $x_3 = 1$ und $x_4 = \frac{1}{3}$. Wegen $f'(x_3) = 0$ und $f''(x_3) = 6 > 0$ besitzt f in $x_3 = 1$ ein isoliertes lokales Minimum $T(1; 0)$, und wegen $f'(x_4) = 0$ und $f''(x_4) = -6 < 0$ besitzt f in $x_4 = \frac{1}{3}$ ein isoliertes lokales Maximum $H(\frac{1}{3}; \frac{4}{9})$.

b) Es ist

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int (3x^3 - 6x^2 + 3x) dx = \\ &= 3 \cdot \frac{1}{4} x^4 - 6 \cdot \frac{1}{3} x^3 + 3 \cdot \frac{1}{2} x^2 + C = \frac{3}{4} x^4 - 2x^3 + \frac{3}{2} x^2 + C; \end{aligned}$$

damit ist etwa $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{3}{4} x^4 - 2x^3 + \frac{3}{2} x^2$, eine Stammfunktion von f .

c) Es ist

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^1 (3x^3 - 6x^2 + 3x) dx = \left[\frac{3}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_{-1}^1 = \\ &= \left(\frac{3}{4} \cdot 1^4 - 2 \cdot 1^3 + \frac{3}{2} \cdot 1^2 \right) - \left(\frac{3}{4} \cdot (-1)^4 - 2 \cdot (-1)^3 + \frac{3}{2} \cdot (-1)^2 \right) = \\ &= \left(\frac{3}{4} - 2 + \frac{3}{2} \right) - \left(\frac{3}{4} + 2 + \frac{3}{2} \right) = -4\end{aligned}$$

oder unter Verwendung der in b) ermittelten Stammfunktion

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = F(1) - F(-1) = \frac{1}{4} - \frac{17}{4} = -\frac{16}{4} = -4.$$

Ferner gilt unter Berücksichtigung des in a) untersuchten Funktionsverlaufs

$$\int_{-1}^1 |f(x)| dx = \int_{-1}^0 |f(x)| dx + \int_0^1 |f(x)| dx$$

mit

$$\begin{aligned}\int_{-1}^0 |f(x)| dx &= \int_{-1}^0 (-f(x)) dx = \int_{-1}^0 (-3x^3 + 6x^2 - 3x) dx = \\ &= \left[-\frac{3}{4}x^4 + 2x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right]_{-1}^0 = 0 - \left(-\frac{17}{4} \right) = \frac{17}{4}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(x)| dx &= \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (3x^3 - 6x^2 + 3x) dx = \\ &= \left[\frac{3}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

und damit

$$\int_{-1}^1 |f(x)| dx = \int_{-1}^0 |f(x)| dx + \int_0^1 |f(x)| dx = \frac{17}{4} + \frac{1}{4} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2};$$

unter Verwendung der Stammfunktion F ergibt sich alternativ

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 |f(x)| dx &= \int_{-1}^0 |f(x)| dx + \int_0^1 |f(x)| dx = \\ &= \int_{-1}^0 (-f(x)) dx + \int_0^1 f(x) dx = - \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = \\ &= -(F(0) - F(-1)) + (F(1) - F(0)) = \\ &= F(1) - 2 \cdot F(0) + F(-1) = \frac{1}{4} - 2 \cdot 0 + \frac{17}{4} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}.\end{aligned}$$

Die (unterhalb der x -Achse liegende) von G_f und der x -Achse im Bereich von -1 bis 0 begrenzte Teilfläche besitzt den Inhalt $A_1 = \frac{17}{4}$, die (oberhalb der x -Achse liegende) von G_f und der x -Achse im Bereich von 0 bis 1 begrenzte Teilfläche den Inhalt $A_2 = \frac{1}{4}$; für die bestimmten Integrale gilt daher $\int_{-1}^1 f(x) dx = A_2 - A_1$ und $\int_{-1}^1 |f(x)| dx = A_2 + A_1$.

10. a) Die gegebene Menge

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ und } e^x - 1 \leq y \leq e^{-x} + 1\}.$$

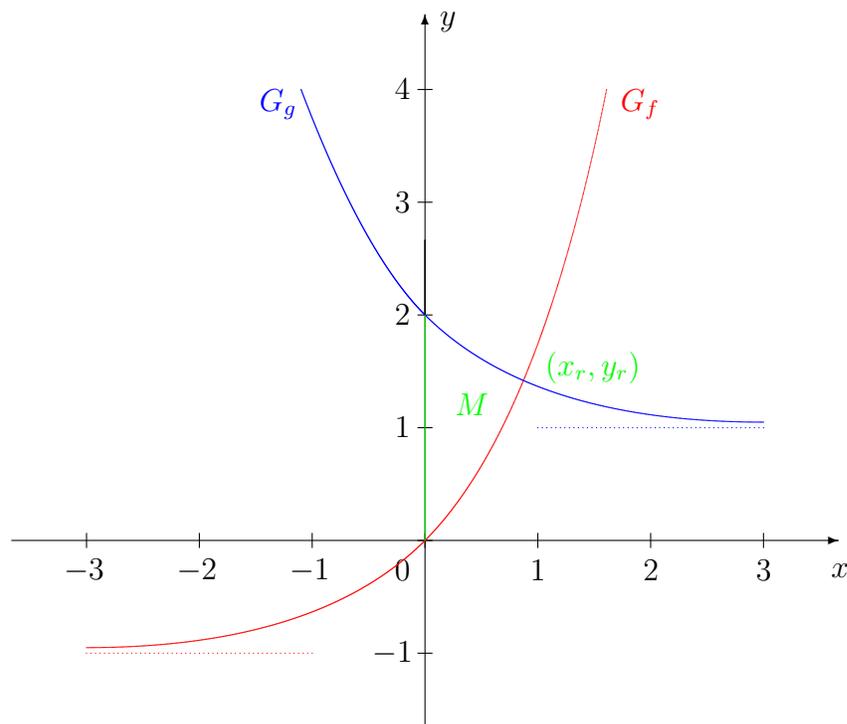
wird durch die y -Achse nach links sowie den Graphen G_f der Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x - 1,$$

nach unten und den Graphen G_g der Funktion

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = e^{-x} + 1,$$

nach oben begrenzt.



Für den rechten Eckpunkt (x_r, y_r) von M gilt $f(x_r) = y_r$ und $g(x_r) = y_r$, also

$$e^{x_r} - 1 = f(x_r) = y_r = g(x_r) = e^{-x_r} + 1,$$

und mit der Substitution

$$z = e^{x_r} > 0 \quad \text{und damit} \quad e^{-x_r} = \frac{1}{e^{x_r}} = \frac{1}{z}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} e^{x_r} - 1 = e^{-x_r} + 1 &\iff z - 1 = \frac{1}{z} + 1 \iff z - 2 = \frac{1}{z} \iff \\ &\iff z^2 - 2z = 1 \iff z^2 - 2z + 1 = 2 \iff (z - 1)^2 = 2 \iff_{z-1 > -1} \\ &\iff z - 1 = \sqrt{2} \iff z = 1 + \sqrt{2} \iff x_r = \ln z = \ln(1 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

und damit

$$y_r = e^{x_r} - 1 = e^{\ln(1+\sqrt{2})} - 1 = (1 + \sqrt{2}) - 1 = \sqrt{2}.$$

b) Für den gesuchten Flächeninhalt A_M von M ergibt sich

$$\begin{aligned} A_M &= \int_0^{x_r} (g(x) - f(x)) dx = \int_0^{x_r} ((e^{-x} + 1) - (e^x - 1)) dx = \\ &= \int_0^{x_r} (e^{-x} - e^x + 2) dx = \left[-e^{-x} - e^x + 2x \right]_0^{x_r} = \\ &= \left(-\underbrace{e^{-x_r}}_{\substack{=e^{x_r}-2 \\ \text{a)}}} - e^{x_r} + 2x_r \right) - \left(-e^0 - e^0 + 2 \cdot 0 \right) = \\ &= \left(2 - 2e^{x_r} + 2x_r \right) + 2 = 4 - 2e^{\ln(1+\sqrt{2})} + 2 \ln(1 + \sqrt{2}) = \\ &= 4 - 2(1 + \sqrt{2}) + 2 \ln(1 + \sqrt{2}) = 2 - 2\sqrt{2} + 2 \ln(1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

11. a) Die Funktion

$$f_1 : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } -1 \leq x \leq 0, \\ 2, & \text{für } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

ist als Treppenfunktion integrierbar, wegen $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2 \neq 1 = f(0)$ aber nicht stetig.

b) Nach dem Satz von Weierstraß besitzt die stetige Funktion $f_2 : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ein globales Minimum p und ein globales Maximum q , und für den Wertebereich gilt $W_f = [f(p); f(q)]$; damit ist f_2 beschränkt.

c) Bekanntlich ist die Funktion

$$f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_3(x) = |x|,$$

stetig, aber (an der Stelle $a = 0$) nicht differenzierbar.

d) Die Funktion

$$f_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_4(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{für } x \neq 0, \\ 0, & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

ist zunächst an allen Stellen $x \neq 0$ differenzierbar mit

$$f_4'(x) = 2x \cdot \sin \frac{1}{x} + x^2 \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

Des weiteren ist

$$\left| \frac{f_4(x) - f_4(0)}{x - 0} \right| = \left| x \sin \frac{1}{x} \right| = \underbrace{|x|}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\left| \sin \frac{1}{x} \right|}_{\leq 1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0;$$

damit ist f_4 auch im Punkt 0 differenzierbar mit $f_4'(0) = 0$. Zum Nachweis, daß die Ableitung f_4' im Punkt $a = 0$ unstetig ist, betrachten wir die Nullfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen

$$f_4'(x_n) = \frac{2}{2n\pi} \sin(2n\pi) - \cos(2n\pi) = \frac{1}{n\pi} \cdot \underbrace{\sin(2n\pi)}_{=0} - \underbrace{\cos(2n\pi)}_{=1} = -1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_4'(x_n) = -1 \neq 0 = f_4'(0);$$

damit ist f_4' im Punkt $a = 0$ unstetig.

12. Die Funktion

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(t) = \cos t \cdot \arctan t,$$

ist als Produkt der beiden stetigen Funktionen \cos und \arctan selbst stetig und damit über jedem abgeschlossenen Intervall $[a; b]$ integrierbar; insbesondere existiert das Integral $\int_0^x h(t) dt$ für jedes $x \in \mathbb{R}$, wobei für $x = 0$ die Festlegung

$$\int_0^0 h(t) dt = 0 \text{ sowie für } x < 0 \text{ die Konvention } \int_0^x h(t) dt = - \int_x^0 h(t) dt \text{ greift.}$$

Darüber hinaus ist nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung die Integralfunktion

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^x h(t) dt,$$

differenzierbar mit

$$F'(x) = h(x) = \cos x \cdot \arctan x$$

für alle $x \in \mathbb{R}$; des weiteren ist die Funktion h (als Produkt differenzierbarer Funktionen) selbst differenzierbar, und nach der Produktregel gilt

$$F''(x) = h'(x) = -\sin x \cdot \arctan x + \cos x \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Wegen

$$F'(0) = \underbrace{\cos 0}_{=1} \cdot \underbrace{\arctan 0}_{=0} = 0$$

und

$$F''(0) = \underbrace{-\sin 0}_{=0} \cdot \underbrace{\arctan 0}_{=0} + \underbrace{\cos 0}_{=1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+0^2}}_{=1} = 1 > 0$$

besitzt die Funktion F an der Stelle 0 ein (isoliertes) lokales Minimum.