MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2016
Blatt 2
27.04.2016

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“ — Bearbeitungsvorschlag —

5. Aufgrund der Stetigkeit der Exponentialfunktion sowie der trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus gilt

$$\lim_{x\to 0} e^x = e^0 = 1 \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to 0} e^{-x} = e^{-0} = 1$$

sowie

$$\lim_{x\to 0} \sin x = \sin 0 = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1,$$

so daß eine zweimalige Anwendung der Regel von de l'Hospital

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1-\cos x} \underset{„\frac{0}{0}“}{\overset{\text{L'H}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} \underset{„\frac{0}{0}“}{\overset{\text{L'H}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{1+1}{1} = 2$$

ergibt. Des weiteren gilt

$$\frac{x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} \cdot \left(x \cos\frac{1}{x}\right)$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{Z}\cdot\pi)$, so daß wir das Grenzverhalten für $x \to 0$ der beiden Faktoren

$$\frac{x}{\sin x} \qquad \text{und} \qquad \left(x\cos\frac{1}{x}\right)$$

getrennt untersuchen können. Zum einen liefert die Regel von de l'Hospital

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \underset{„\frac{0}{0}“}{\overset{\text{L'H}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{1} = 1,$$

zum anderen ergibt sich wegen

$$\left|x\cos\frac{1}{x}\right| = |x| \cdot \underbrace{\left|\cos\frac{1}{x}\right|}_{\leq 1} \leq |x| \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

unter Verwendung des Schrankenlemmas

$$\lim_{x\to 0} \left(x\cos\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Insgesamt erhält man also

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin x} = \left(\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x}\right) \cdot \left(\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x}\right) = 1 \cdot 0 = 0.$$

6. Gemäß der Definition der allgemeinen Potenz $a^b = e^{b \ln a}$ für $a \in \mathbb{R}^+$ und $b \in \mathbb{R}$ ist

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\,\ln x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^+$; folglich ist f als Verknüpfung der differenzierbaren Funktionen exp (als äußerer Funktion) und $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x} \ln x$ (als innerer Funktion) differenzierbar, und nach der Kettenregel und (für das Nachdifferenzieren von g) der Produktregel gilt

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}\,\ln x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \right) = x^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^+$. Für das Monotonieverhalten von f ergibt sich damit:

- Für alle $x \in \,]0; e[$ ist $\ln x < 1$, also $1 - \ln x > 0$, und damit wegen $x^{\frac{1}{x}} > 0$ und $\frac{1}{x^2} > 0$ auch $f'(x) > 0$; folglich ist f auf $]0; e]$ streng monoton wachsend.
- Für alle $x \in \,]e; \infty[$ ist $\ln x > 1$, also $1 - \ln x < 0$, und damit wegen $x^{\frac{1}{x}} > 0$ und $\frac{1}{x^2} > 0$ auch $f'(x) < 0$; folglich ist f auf $[e; \infty[$ streng monoton fallend.

Wegen

$$\lim_{x \to 0+} g(x) = \lim_{x \to 0+} \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to \infty} \cdot \underbrace{\ln x}_{\to -\infty} = -\infty$$

ergibt sich zunächst

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} e^{g(x)} = \lim_{y \to -\infty} e^y = 0.$$

Ferner erhalten wir mit Hilfe der Regel von de l'Hospital

$$\lim_{x \to \infty} g(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} \underset{„\frac{\infty}{\infty}“}{\overset{\text{L'H}}{=}} \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

sowie aufgrund der Stetigkeit der Exponentialfunktion im Punkt $a = 0$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} e^{g(x)} = e^0 = 1.$$

Damit existieren beide Grenzwerte im eigentlichen Sinne.

7. Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^2}{2} - x + \sin x,$$

besitzt zunächst wegen

$$f(0) = \frac{0^2}{2} - 0 + \sin 0 = 0 - 0 + 0 = 0$$

die offensichtliche Nullstelle $a = 0$; es bleibt also zu zeigen, daß f keine weiteren Nullstellen besitzen kann. Dabei ist f (als Summe einer quadratischen Funktion und des Sinus) stetig und beliebig oft differenzierbar, und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f'(x) = x - 1 + \cos x \qquad \text{und} \qquad f''(x) = 1 - \sin x.$$

Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ gilt $\sin x \neq 1$ und damit $(f')'(x) = f''(x) = 1 - \sin x > 0$ für alle $x \in \left]\frac{\pi}{2} + k\,\pi;\ \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi\right[$, so daß f' auf $\left[\frac{\pi}{2} + k\,\pi;\ \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi\right]$, streng monoton wächst; folglich ist f' eine auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsende Funktion, die zudem wegen

$$f'(0) = 0 - 1 + \cos 0 = 0 - 1 + 1 = 0$$

ebenfalls in $a = 0$ eine Nullstelle besitzt; damit erhält man:

- für alle $x < 0$ gilt $f'(x) < f'(0) = 0$, so daß f auf $\mathbb{R}_0^-$ streng monoton fällt, woraus sich $f(x) > f(0) = 0$ für alle $x < 0$ ergibt;
- für alle $x > 0$ gilt $f'(x) > f'(0) = 0$, so daß f auf $\mathbb{R}_0^+$ streng monoton wächst, woraus sich $f(x) > f(0) = 0$ für alle $x > 0$ ergibt.

Somit ist $f(x) \neq 0$ für alle $x \neq 0$ und folglich $a = 0$ die einzige Nullstelle von f.

8. Gemäß der Definition der allgemeinen Potenz $a^b = e^{b \ln a}$ für alle $a > 0$ und $b \in \mathbb{R}$ ergibt sich für die gegebene Funktion

$$f :]0; \infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^{\sin x} = e^{\sin x \cdot \ln x};$$

dementsprechend betrachten wir auch die Funktion

$$g :]0; \infty[\to \mathbb{R}, \quad g(x) = \sin x \cdot \ln x.$$

a) Wegen

$$\lim_{x \to 0+} \sin x = 0+ \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \to 0+} \ln x = -\infty$$

ist der Grenzwert der Funktion

$$g(x) = \sin x \cdot \ln x \qquad \text{für} \quad x \to 0+$$

vom Typ „$(0+) \cdot (-\infty)$“, so daß sich über die Umformung

$$g(x) = \sin x \cdot \ln x = \frac{\ln x}{(\sin x)^{-1}} \qquad \text{für} \quad x \to 0+$$

ein Grenzwert vom Typ „$\frac{-\infty}{+\infty}$“ ergibt; eine zweifache Anwendung der Regel von de l'Hospital liefert dann

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0+} g(x) &= \lim_{x \to 0+} (\sin x \cdot \ln x) = \lim_{x \to 0+} \frac{\ln x}{(\sin x)^{-1}} \underset{„\frac{\pm\infty}{\pm\infty}“}{\overset{\text{L'H}}{=}} \\
&= \lim_{x \to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{(-1)\,(\sin x)^{-2} \cdot \cos x} = \lim_{x \to 0+} \frac{\sin^2 x}{-x \cos x} \underset{„\frac{0}{0}“}{\overset{\text{L'H}}{=}} \\
&= \lim_{x \to 0+} \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{-(\cos x - x \sin x)} = \frac{2 \cdot 0 \cdot 1}{-(1 - 0 \cdot 0)} = \frac{0}{-1} = 0.
\end{aligned}$$

Unter Verwendung der Stetigkeit der Exponentialfunktion erhält man damit

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} e^{g(x)} = e^{\lim_{x \to 0+} g(x)} = e^0 = 1,$$

so daß

$$\widetilde{f} : [0;\infty[\to \mathbb{R}, \quad \widetilde{f}(x) = \begin{cases} x^{\sin x}, & \text{für } x > 0, \\ 1, & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

eine stetige Fortsetzung der gegebenen Funktion f ist.

b) Die gegebene Funktion f ist als Komposition der Exponentialfunktion und der als Produkt des Sinus und des natürlichen Logarithmus differenzierbaren Funktion g selbst differenzierbar, und für alle $x \in]0;\infty[$ gilt

$$f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x) = x^{\sin x} \cdot \left(\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x} \right).$$

Wegen

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} \overset{\text{L'H}}{\underset{„\frac{0}{0}“}{=}} \lim_{x\to 0+} \frac{\cos x}{1} = 1$$

ergibt sich damit

$$\lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0+} \Bigg(\underbrace{x^{\sin x}}_{\substack{\to 1 \\ \text{a)}}} \cdot \underbrace{\Bigg(\underbrace{\cos x}_{\to 1} \cdot \underbrace{\ln x}_{\to -\infty} + \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} \Bigg)}_{\to -\infty} \Bigg) = -\infty.$$

c) Wegen der Stetigkeit der Fortsetzung $\widetilde{f}$ im Punkt $a = 0$ ergibt sich

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0+} \frac{f(x) - 1}{x - 0} \overset{\text{L'H}}{\underset{„\frac{0}{0}“}{=}} \lim_{x\to 0+} \frac{f'(x)}{1} \underset{\text{b)}}{=} -\infty;$$

damit existiert der Differentialquotient von $\widetilde{f}$ im Punkt $a = 0$ nur im uneigentlichen Sinne, mithin ist $\widetilde{f}$ in $a = 0$ nicht differenzierbar.