MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2016
Blatt 1
20.04.2016

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“ — Bearbeitungsvorschlag —

1. Die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \exp(x^3) + \arctan x + x^2 - 2$$

ist als Summe und Komposition von Polynomfunktionen, der Exponentialfunktion und des Arcus tangens selbst stetig und differenzierbar; ferner ist

$$f(0) = \exp(0^3) + \arctan 0 + 0^2 - 2 = 1 + 0 + 0 - 2 = -1 < 0.$$

Wegen

$$f(x) = \underbrace{\exp(x^3)}_{\to 0} + \underbrace{\arctan(x)}_{\to -\frac{\pi}{2}} + \underbrace{x^2}_{\to +\infty} - 2 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

gibt es ein $a < 0$ mit $f(a) > 0$, und die stetige Funktion f besitzt nach dem Nullstellensatz mindestens eine Nullstelle $\xi_1 \in]a; 0[$; wegen

$$f(x) = \underbrace{\exp(x^3)}_{\to +\infty} + \underbrace{\arctan(x)}_{\to \frac{\pi}{2}} + \underbrace{x^2}_{\to +\infty} - 2 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

gibt es ein $b > 0$ mit $f(b) > 0$, und die stetige Funktion f besitzt nach dem Nullstellensatz mindestens eine Nullstelle $\xi_2 \in]0; b[$. Insgesamt besitzt also f mindestens zwei Nullstellen, nämlich $\xi_1 < 0$ und $\xi_2 > 0$, und folglich nach dem Satz von Rolle eine Nullstelle $\xi \in]\xi_1; \xi_2[$ der Ableitung.

2. Wir betrachten die Einschränkung f der Sinusfunktion auf das abgeschlossene Intervall $[a, b]$, es ist also

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin x.$$

Damit ist f differenzierbar mit $f'(x) = \cos x$ für alle $x \in [a, b]$; insbesondere genügt f den Voraussetzungen des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, nämlich Stetigkeit auf $[a, b]$ und Differenzierbarkeit auf $]a, b[$. Der Mittelwertsatz liefert nun ein $\xi \in]a, b[$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \qquad \text{also} \qquad \cos \xi = \frac{\sin b - \sin a}{b - a}.$$

Da nun die Cosinusfunktion auf den Intervall $[0, \pi]$ streng monoton fallend ist, folgt aus $0 < a < \xi < b < \pi$ schon $\cos a > \cos \xi > \cos b$, also

$$\cos b < \frac{\sin b - \sin a}{b - a} < \cos a,$$

woraus sich wegen $b-a>0$ die Beziehung

$$(b-a)\,\cos b < \sin b - \sin a < (b-a)\,\cos a$$

ergibt.

3. Zu betrachten ist eine differenzierbare (mithin stetige) Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit

$$f(0)=-3 \qquad \text{und} \qquad 1<f'(x)<2 \qquad \text{für alle} \quad x\in\mathbb{R}.$$

Insbesondere ist damit die Funktion f für jedes $b>0$ auf dem abgeschlossenen Intervall $[0,b]$ stetig und auf dem offenen Intervall $]0,b[$ differenzierbar, erfüllt also die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung; folglich existiert ein $\xi_b\in\,]0,b[$ mit

$$\frac{f(b)-f(0)}{b-0}=f'(\xi_b) \qquad \text{bzw.} \qquad f(b)-f(0)=f'(\xi_b)\cdot(b-0)$$

und damit

$$f(b)=f(0)+f'(\xi_b)\cdot b \qquad \text{bzw.} \qquad f(b)=-3+f'(\xi_b)\cdot b.$$

Demnach ergibt sich für $b=1$ zum einen

$$f(1)=-3+f'(\xi_1)\cdot 1=-3+\underbrace{f'(\xi_1)}_{<2}<-3+2=-1<0$$

und für $b=3$ zum anderen

$$f(3)=-3+f'(\xi_3)\cdot 3=-3+3\,\underbrace{f'(\xi_3)}_{>1}>-3+3\cdot 1=0;$$

damit besitzt die auf dem abgeschlossenen Intervall $[1,3]$ insbesondere stetige Funktion f wegen $f(1)<0$ und $f(3)>0$ nach dem Nullstellensatz (mindestens) eine Nullstelle $\xi\in[1,3]$.

4. Wir haben zu zeigen, daß die Funktion

$$h:[a,b]\to\mathbb{R}, \quad h(x)=(f(x))^2-(g(x))^2\,,$$

auf $]a,b[$ konstant ist und dort stets den Wert 1 annimmt. Da nach Voraussetzung f und g auf $[a,b]$ stetig und auf $]a,b[$ differenzierbar sind, ist h als Differenz der Quadrate von f und g ebenfalls auf $[a,b]$ stetig und auf $]a,b[$ differenzierbar, und für alle $x\in\,]a,b[$ gilt unter Verwendung der Kettenregel

$$h'(x)=2\,f(x)\,\underbrace{f'(x)}_{=g(x)}-2\,g(x)\,\underbrace{g'(x)}_{=f(x)}=2\,f(x)\,g(x)-2\,g(x)\,f(x)=0.$$

Folglich ist h auf $]a,b[$ konstant, es gibt also ein $c\in\mathbb{R}$ mit $h(x)=c$ für alle $x\in\,]a,b[$. Wegen der Stetigkeit von h im Punkt a ergibt sich

$$c=\lim_{x\to a+}h(x)=h(a)=(\underbrace{f(a)}_{=1})^2-(\underbrace{g(a)}_{=0})^2=1^2-0^2=1.$$

Damit gilt $(f(x))^2-(g(x))^2=h(x)=1$ für alle $x\in\,]a,b[$.