

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“

45. Für Teilmengen $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ beweise oder widerlege man:
- a) Sind X_1 und X_2 konvex, so ist auch $X_1 \cup X_2$ konvex.
 - b) Sind X_1 und X_2 konvex, so ist auch $X_1 \cap X_2$ konvex.
 - c) Sind X_1 und X_2 zusammenhängend, so ist auch $X_1 \cup X_2$ zusammenhängend.
 - d) Sind X_1 und X_2 zusammenhängend, so ist auch $X_1 \cap X_2$ zusammenhängend.
46. a) Man zeige, daß die Teilmenge $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ weder innere noch äußere Punkte besitzt, und gebe den Rand $\partial\mathbb{Q}$ von $\mathbb{Q}$ an.
- b) Man entscheide, ob die Teilmenge $X = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ offen bzw. abgeschlossen bzw. kompakt ist.

47. a) Für eine Teilmenge $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}^n$ und einen Punkt $a \in X$ wird der *Abstand*

$$\text{dist}(a, X) = \inf \{d(a, x) \mid x \in X\}$$

von a und X definiert. Man zeige: $\text{dist}(a, X) = 0 \iff a \in \overline{X}$.

- b) Im Falle $X \neq \mathbb{R}^n$ wird mit dem Komplement $Y = \mathbb{R}^n \setminus X$ auch der *signierte Abstand*

$$\text{sdist}(a, X) = \begin{cases} \text{dist}(a, X), & \text{falls } a \notin X, \\ -\text{dist}(a, Y), & \text{falls } a \in X, \end{cases}$$

definiert. Man zeige:

- i. $\text{sdist}(a, X) < 0 \iff a$ ist ein innerer Punkt von X .
 - ii. $\text{sdist}(a, X) > 0 \iff a$ ist ein äußerer Punkt von X .
 - iii. $\text{sdist}(a, X) = 0 \iff a$ ist ein Randpunkt von X .
48. (*Staatsexamensaufgabe Herbst 2003*). Seien p ein Punkt und M eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$. Man beweise, daß auch $\{p + x \mid x \in M\}$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ ist.

Abgabe bis Mittwoch, den 13. Juli 2016, 14⁰⁰ Uhr (Kästen vor der Bibliothek).