

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“

41. (Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2009). Gegeben sei die Kurve

$$\varphi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t),$$

sowie ihre Bildmenge

$$K = \{\varphi(t) \mid t \in [0; 2\pi]\}.$$

- Für welche $t \in [0, 2\pi]$ weist der Punkt $\varphi(t) \in K$ den kleinsten bzw. größten Abstand vom Ursprung $(0, 0)$ auf?
- Man skizziere die Bildmenge K .
- Man begründe, warum die Kurve φ rektifizierbar ist, und bestimme ihre Bogenlänge.

42. Gegeben sei die Kurve

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(t) = (t^2 - 1, t(t^2 - 1)).$$

- Man bestimme alle Kurvenpunkte, in denen die Tangente zu einer der beiden Koordinatenachsen parallel ist.
- Man zeige, daß die Kurve f genau einen Doppelpunkt besitzt, und bestimme die Tangentialvektoren in diesem Doppelpunkt.
- Man skizziere die Bildmenge K der Kurve f .
- Man bestimme den Inhalt derjenigen Fläche, die von der in K enthaltenen geschlossenen Teilkurve umrandet wird.

43. Gegeben sei die Kurve

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(t) = (t^2 \cos(2\pi t), t^2 \sin(2\pi t), t^2).$$

- Man zeige, daß die Kurve auf dem Kreiskegel $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ verläuft.
- Für welches $t \in [0; 1]$ besitzt der Kurvenpunkt $f(t)$ den kleinsten Abstand vom Punkt $(0, 0, 1)$? Wie groß ist dieser Abstand?
- Man berechne die Bogenlänge der Kurve f .

44. (Staatsexamensaufgabe Herbst 2000). Gegeben sei die Kurve

$$G = \{(\varphi(t), \psi(t)) \mid -\pi \leq t \leq \pi\}$$

durch $\varphi(t) = 2t - \sin t$ und $\psi(t) = 1 + \cos t$ für alle $t \in [-\pi, \pi]$.

- a) Man zeige, daß die Funktion $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(t) = 2t - \sin t$, streng monoton wächst; damit ist G der Graph der Funktion

$$f : [-2\pi, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x)).$$

- b) Man bestimme den größten Winkel α_{\max} unter allen Winkeln $\alpha(t)$, die die x -Achse mit den Kurventangenten einschließt, und zeige $\alpha_{\max} = 30^\circ$.
- c) Man berechne den Inhalt der von G und der x -Achse eingeschlossenen Fläche $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2\pi \leq x \leq 2\pi \text{ und } 0 \leq y \leq f(x)\}$.

Abgabe bis Mittwoch, den 6. Juli 2016, 14⁰⁰ Uhr (Kästen vor der Bibliothek).