

Übungen zur Vorlesung „Differential- und Integralrechnung II“

37. (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2003*). Seien $a, b \in \mathbb{R}^+$. Ein Massenpunkt M_1 bewege sich mit konstanter Geschwindigkeit v_1 von $A = (a, 0)$ auf der Koordinatenachse $y = 0$ zum Ursprung hin, es sei also $M_1 = (x, 0)$ mit $x = a - v_1 t$ zum Zeitpunkt $t \geq 0$. Ein zweiter Massenpunkt M_2 bewege sich mit konstanter Geschwindigkeit v_2 von $B = (0, b)$ auf der Koordinatenachse $x = 0$ zum Ursprung hin, es sei also $M_2 = (0, y)$ mit $y = b - v_2 t$ zum Zeitpunkt $t \geq 0$. Man berechne das Minimum des Abstands von M_1 und M_2 , wenn diese zeitgleich in A und B starten.
38. Man untersuche die folgenden Punktfolgen in \mathbb{R}^2 auf Konvergenz und gebe gegebenenfalls ihren Grenzwert an.
- $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ mit $a_k = \left(\frac{\sqrt{2k}}{\sqrt{k+1}}; \frac{2k}{k^2+1} \right)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.
 - $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ mit $a_k = \left(\cos \frac{k\pi}{2}; (-1)^k \frac{k}{k+1} \right)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.
 - $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $a_k = \left(\cos \frac{1}{k}; k \sin \frac{1}{k} \right)$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
 - $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $a_k = \left(k \cos \frac{1}{k}; \sin \frac{1}{k} \right)$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Welche dieser Folgen besitzen Häufungspunkte?

39. (*Staatsexamensaufgabe Herbst 1991*). Der Handlauf des Geländers einer Wendeltreppe beschreibe die Raumkurve

$$\gamma_a : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \gamma_a(t) = (\cos t, \sin t, at)$$

für einen festen Parameter $a > 0$. Der Architekt hat für den Handlauf ein Band der Länge 7 m bereitgestellt. Wie groß darf a höchstens sein, damit das bereitgestellte Band reicht?

40. (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2012*). Gegeben sei die Kurve

$$\gamma : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t^3 - 3t + 2, 12 - 3t^2),$$

mit der Bildmenge $K = \{\gamma(t) \mid t \in [1, 2]\}$.

- Man berechne $\gamma(1)$ und $\gamma(2)$ sowie $\gamma'(1)$ und $\gamma'(2)$ und skizziere damit die Bildmenge K .
- Man bestimme die Bogenlänge von K .

Abgabe bis Mittwoch, den 29. Juni 2016, 14⁰⁰ Uhr (Kästen vor der Bibliothek).