

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“

33. (Staatsexamensaufgabe Frühjahr 1999).

- a) Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^{2n}$ konvergiert.
- b) Man stelle mit Hilfe der Reihenentwicklung des natürlichen Logarithmus die Funktion

$$F : [0; 1[\rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^x \ln(t^2 + 1) dt,$$

als Potenzreihe dar.

34. (Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2012).

- a) Für $a \neq 0$ zeige man $\frac{1}{a-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^{n+1}}$. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert diese Reihe?
- b) Man gebe mit Hilfe der Partialbruchzerlegung die Taylorreihe von

$$g(x) = \frac{1}{(1+x)(2+x)}$$

bei der Entwicklung um 0 sowie ihren Konvergenzradius an.

35. (Staatsexamensaufgabe Herbst 2011).

- a) Man gebe mit Hilfe der Partialbruchzerlegung für

$$f(x) = \frac{x}{(1+x)(1-2x)}$$

eine Potenzreihendarstellung $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ an.

- b) Man bestimme den Konvergenzradius der Reihe aus a) und das Verhalten auf dem Rande des Konvergenzintervalls.
- c) Man zeige, daß die Koeffizienten a_n der Reihe aus a) die Rekursionsgleichung

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

erfüllen.

36. Für eine reelle Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ betrachte man die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2} & \text{für } x \neq 0, \\ \alpha & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

- a) Man bestimme den Wert von α , für den die Funktion f stetig ist.
- b) Man zeige, daß mit diesem Wert für α die Funktion f sogar beliebig oft differenzierbar ist, und bestimme $f^{(n)}(0)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Abgabe bis Mittwoch, den 22. Juni 2016, 14⁰⁰ Uhr (Kästen vor der Bibliothek).