

## Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“

21. (*Staatsexamensaufgabe Herbst 2011*).

a) Man bestimme das zweite Taylorpolynom  $T_2$  der Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin(x^2),$$

mit dem Entwicklungspunkt  $a = 0$ .

b) Man beweise für alle  $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  die Abschätzung

$$|f(x) - T_2(x)| \leq \frac{1}{6}.$$

22. (*Staatsexamensaufgabe Herbst 2012*). Gegeben sei die Funktion

$$f : ]-1, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{1+x}.$$

a) Man finde für  $n \in \mathbb{N}$  eine Formel für die  $n$ -te Ableitung von  $f$  und beweise diese mittels vollständiger Induktion.

b) Man bestimme das Taylorpolynom  $T_2$  von  $f$  im Entwicklungspunkt  $a = 2$ .

c) Man beweise

$$|f(x) - T_2(x)| \leq \frac{1}{16}$$

für alle  $x \in [1, 3]$ .

23. (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2008*). Gegeben ist die reelle Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x \sin x.$$

Man bestimme mit Hilfe der Taylorformel eine Polynomfunktion  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\text{Grad } p \leq 4$ , so dass gilt:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - p(x)}{x^4} = 0.$$

Man begründe ferner, daß für alle  $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  gilt:

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{\sqrt{e}}{480}.$$

24. (*Staatsexamensaufgabe Herbst 2013*).

a) Für alle  $x \in [0, \pi]$  beweise man die Ungleichung

$$\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}.$$

b) Man beweise diese Ungleichung für  $x > \pi$ .