

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“

17. (*Staatsexamensaufgabe Herbst 2015*). Man berechne das Integral

$$\int_1^2 \cos\left(\pi \frac{3x-3}{3x-x^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^2-6x+9}\right) dx.$$

18. (*Staatsexamensaufgabe Herbst 2005*). Man beweise für $0 < a < 1$ die Gleichheit

$$\int_a^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_1^{\frac{1}{a}} \frac{dx}{1+x^2}$$

und leite hieraus eine Funktionalgleichung für den Arcustangens her.

19. Man untersuche die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls ihren Grenzwert:

a) $\int_0^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ und $\int_e^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx,$
b) $\int_{-\infty}^\infty e^x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x - \frac{1}{1+x^2}\right) dx.$

20. (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2012*). Gegeben sei die Funktion

$$f : [2, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\ln x}{x^2}.$$

- a) Man zeige, daß f monoton fällt und nur positive Werte annimmt.
- b) Man bestimme mit Hilfe partieller Integration eine Stammfunktion von f .
- c) Man untersuche mit Hilfe des Integralvergleichskriteriums die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$$

auf Konvergenz.

Abgabe bis Mittwoch, den 25. Mai 2016, 14⁰⁰ Uhr (Kästen vor der Bibliothek).