

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“

5. (*Staatsexamensaufgabe Herbst 2013*).

a) Man zeige

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(t))}{t^2} = -\frac{1}{2}.$$

b) Man berechne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right)^n.$$

6. (*Staatsexamensaufgabe Herbst 2012*). Gegeben sei die Funktion

$$f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x \cdot (2x - 1 + \ln(x)).$$

Man beweise:

a) $g = f'$ ist streng monoton wachsend auf $]0, \infty[$.

b) $g = f'$ hat genau eine Nullstelle in $]0, \infty[$.

c) f hat genau ein lokales Extremum in $]0, \infty[$, und zwar ein Minimum.

7. (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2009*).

a) Man zeige, daß die Funktion

$$h :]0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x+1},$$

streng monoton fällt und nur positive Werte annimmt.

b) Man zeige, daß die Funktion

$$f :]0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x,$$

streng monoton steigt, und bestimme ihren Wertebereich.

8. (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2008*). Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \arctan x + \frac{1}{1+x^2}.$$

a) Man zeige, daß die Funktion f umkehrbar ist, und bestimme ihren Wertebereich $W_f = f(\mathbb{R})$.

b) Man begründe, daß die Umkehrfunktion $f^{-1} : W_f \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist, und gebe alle Punkte $a \in \mathbb{R}$ an, in denen f^{-1} auch differenzierbar ist.

Abgabe bis Mittwoch, den 4. Mai 2016, 14⁰⁰ Uhr (Kästen vor der Bibliothek).