

## Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“

1. (*Staatsexamensaufgabe Herbst 2008*). Man beweise mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung für alle  $n \in \mathbb{N}$  die Beziehung

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$$

und schlieÙe hieraus

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \ln(n+1) \quad \text{und} \quad \ln(n) \geq \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - 1.$$

2. (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2002*). Für alle  $x, y \in [-1; 1]$  zeige man

$$\left| \sin \frac{x^3 + x}{2} - \sin \frac{y^3 + y}{2} \right| \geq \frac{\cos 1}{2} \cdot |x - y|.$$

3. (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2010*). Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion mit

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$$

für alle  $x, y \in \mathbb{R}$ .

- Man zeige, daß  $f$  differenzierbar ist.
- Man zeige, daß  $f$  konstant ist.

4. (*Staatsexamensaufgabe Herbst 2011*). Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  reelle Zahlen mit  $a < b$  sowie  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetige und auf  $]a, b[$  differenzierbare Funktionen mit  $f(a) < g(a)$  und  $f'(x) \leq g'(x)$  für alle  $x \in ]a, b[$ . Man zeige mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, daß  $f(x) < g(x)$  für alle  $x \in [a, b]$  gilt.

**Abgabe** bis Mittwoch, den 27. April 2016, 14<sup>00</sup> Uhr (Kästen vor der Bibliothek).