MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2014
Klausur
25.09.2014

Klausur zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“

1. Man beweise die Ungleichung

$$e^x > 1 + x \qquad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

mit Hilfe

- einer geeigneten Kurvendiskussion, (2)
- des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, (2)
- der Taylorformel und Restgliedabschätzung. (2)

2. a) Für eine stetige Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ auf dem nichtleeren Intervall $D \subseteq \mathbb{R}$ definiere man die Begriffe

   - „$F : D \to \mathbb{R}$ ist eine Integralfunktion von f“, (1)
   - „$F : D \to \mathbb{R}$ ist eine Stammfunktion von f“. (1)

   b) Man entscheide, welche der folgenden Aussagen für eine stetige Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ auf dem nichtleeren Intervall $D \subseteq \mathbb{R}$ wahr bzw. falsch ist, und belege die Entscheidung über einen bekannten Satz oder ein Gegenbeispiel:

   - Jede Integralfunktion von f ist eine Stammfunktion von f. (1)
   - Jede Stammfunktion von f ist eine Integralfunktion von f. (1)

   c) Man zeige, daß die Funktion

$$g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_1^x e^t \ln t \, dt,$$

   in $x = 1$ ein isoliertes lokales Minimum besitzt. (2)

3. a) Für den Punkt $a \in \mathbb{R}$ und die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ betrachte man die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x-a)^n$$

mit Konvergenzradius $\varrho \in \mathbb{R}^+$. Man erläutere, welche Konvergenz- bzw. Divergenzaussagen für die Potenzreihe mit Hilfe ihres Konvergenzradius ϱ getroffen werden können, und veranschauliche diese Bereiche auf der Zahlengeraden. (2)

b) Gegeben sei nun die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot (n+1) \cdot (x-2)^n .$$

- Man bestimme das Konvergenzintervall D der Potenzreihe. (2)
- Man stelle

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot (n+1) \cdot (x-2)^n ,$$

als elementare Funktion dar. (2)

4. a) Gegeben sei die Kurve

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad f(t) = \left(\cos t + t \cdot \sin t,\ \sin t - t \cdot \cos t,\ \frac{1}{\sqrt{3}}\, t^3 \right).$$

- Man zeige $\|f'(t)\| = t \cdot \sqrt{1 + 3\,t^2}$ für alle $t \in [0,1]$. (2)
- Man berechne die Bogenlänge von f. (2)

b) Man begründe, daß für die Kurve

$$K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad K(t) = \left(e^t,\ e^{-t},\ e^t\right),$$

die Tangente von K zu jedem Parameterwert $t \in \mathbb{R}$ erklärt ist, und gebe diese Tangente für $t = 0$ explizit an. (2)