

Präsenzübung zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“

1. (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2014*). Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = (\pi - x) \cdot \cos x.$$

- a) Man bestimme die ersten drei Ableitungen f' , f'' und f''' von f .
b) Man bestimme das Taylorpolynom T_2 von f im Entwicklungspunkt $a = \frac{\pi}{2}$.
c) Für alle $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ zeige man die Abschätzung

$$|f(x) - T_2(x)| \leq \frac{\pi^3}{64}.$$

2. (*Staatsexamensteilaufgabe Frühjahr 2014*). Für alle $x > 0$ zeige man

$$\sin x < x.$$

3. (*Staatsexamensteilaufgabe Frühjahr 2014 mit Ergänzung*). Man bestimme eine Stammfunktion von

$$f :]1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1 + \ln x}{x \cdot \ln x}.$$

Man untersuche das uneigentliche Integral

$$\int_1^{\infty} f(x) dx$$

auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Wert.

4. (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2014*). Man zeige, daß die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n}{(3n)!} \cdot x^{3n}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert. Man gebe f' , f'' und f''' jeweils in Potenzreihendarstellung an und folgere daraus, daß $f'''(x) = 8 \cdot f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.