

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“

41. Man betrachte die Teilmengen

$$R_1 = [-3, 3] \times [-1, 1] \quad \text{und} \quad R_2 =]-1, 1[\times]-3, 3[$$

sowie $X_1 = R_1 \cap R_2$ und $X_2 = R_1 \cup R_2$ von \mathbb{R}^2 .

- a) Man skizziere diese vier Teilmengen und entscheide, welche konvex bzw. zusammenhängend sind.
- b) Man bestimme für jede dieser Teilmengen den Rand sowie das Innere und den Abschluß. Welche Teilmengen sind offen bzw. abgeschlossen?

42. Gegeben sei die Menge $X = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

- a) Man zeige, daß X keine inneren Punkte besitzt.
- b) Man bestimme den Rand ∂X von X .

43. (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2006.*) Man beweise, daß $(0, 0)$ ein Randpunkt der Teilmenge

$$\left\{ \left(x, \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right) \mid x \in \mathbb{R}^+ \right\}$$

des \mathbb{R}^2 ist.

44. Für den Parameter $a > 0$ ist die Kurve

$$f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f_a(t) = (e^{at} \cos t, e^{at} \sin t),$$

gegeben; ihre Bildmenge K_a heißt *logarithmische Spirale*.

- a) Man zeige, daß die Kurve f_a jede Ursprungsgerade unter dem Winkel α mit $\cot \alpha = a$ schneidet.
- b) Man skizziere die Bildmenge K_a der Kurve f_a für $a = \frac{1}{\pi}$.
- c) Man berechne die Bogenlänge $L_a(T)$ der Kurve f_a zwischen $T < 0$ und 0 und bestimme $\lim_{T \rightarrow -\infty} L_a(T)$.