MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2014
Blatt 9
18.06.2014

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“

33. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2009).* Sei $r > 0$. Man berechne die Punkte auf der Parabel $y = x^2$ mit dem kürzesten Abstand zu dem Punkt $(0, r)$ auf der y–Achse. Für welche $r > 0$ ist $(0, 0)$ der Punkt mit dem kürzesten Abstand?

34. Man untersuche die folgenden Punktfolgen in $\mathbb{R}^2$ auf Konvergenz und gebe gegebenenfalls ihren Grenzwert an:

    a) $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ mit $a_k = \left(\frac{2\,k}{k+1};\ \frac{k^2}{k^2+3}\right)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

    b) $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ mit $a_k = \left(\cos\frac{k\pi}{2};\ \sin\frac{k\pi}{2}\right)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

    c) $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_k = \left(\left(1+\frac{2}{k}\right)^k;\ \left(1+\frac{1}{k}\right)^{2k}\right)$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

    d) $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_k = \left(\sqrt[k]{k};\ \sqrt{k+1} + (-1)^k\sqrt{k}\right)$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

    Welche der Folgen besitzen Häufungspunkte?

35. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2001).* Sei Γ die durch die Parametrisierung

$$\gamma : \left[-\tfrac{1}{\sqrt{3}}; \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (x(t), y(t)) = \left(3\,t^2 - 1,\ 3\,t^3 - t\right),$$

    gegebene geschlossene Kurve in der (x, y)–Ebene. Man berechne die Bogenlänge von Γ.

36. Gegeben sei die Kurve

$$f : [0; 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad f(t) = ((1-\cos t)\cos t, (1-\cos t)\sin t)\,.$$

    a) Man berechne den $f(t)$ und $f'(t)$ für $t \in \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}, 2\pi\right\}$.

    b) Man skizziere $f([0; 2\pi])$ für die *Kardioide (Herzkurve)* genannte Kurve f.

    c) Man berechne ihre Bogenlänge. (Hinweis: $1 - \cos t = 2\,\sin^2\frac{t}{2}$.)