

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“

17. Für $a > 0$ betrachte man die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+a}}$.

- a) Man zeige, daß f streng monoton fällt, und untersuche das Verhalten von f am Rande des Definitionsbereichs.
- b) Man bestimme eine Stammfunktion von f .
- c) Man untersuche das uneigentliche Integral $\int_0^\infty f(x) dx$ auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls seinen Wert.

18. Man untersuche die Reihen

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \quad \text{und} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n \sqrt{n}}$$

mit Hilfe des Integralvergleichskriteriums jeweils auf Konvergenz.

19. (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2013*). Man betrachte die Funktion

$$f :]1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x}.$$

- a) Man zeige, daß die Funktion f streng monoton fällt.
- b) Man berechne

$$\int_e^{e^2} f(x) dx.$$

20. (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2008*). Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei die Funktion

$$f_n : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = n^2 x e^{-nx},$$

gegeben.

- a) Man bestimme den Wertebereich $W_n = \{f_n(x) \mid x \geq 0\}$ von f_n .
- b) Man ermittle durch partielle Integration eine Stammfunktion von f_n .
- c) Man zeige für jede reelle Zahl $x > 0$:

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0, \quad (ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^x f_n(\xi) d\xi = 1.$$