

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“

9. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x(x-1)^2$.

- a) Man bestimme die Nullstellen sowie die Extremstellen von f . In welchem Bereich verläuft der Graph G_f oberhalb bzw. unterhalb der x -Achse?
- b) Man bestimme eine Stammfunktion von f .
- c) Man bestimme die bestimmten Integrale $\int_{-1}^1 f(x) dx$ und $\int_{-1}^1 |f(x)| dx$ und interpretiere die Werte mit Hilfe geeigneter Flächenstücke.

10. (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2008*). Gegeben sei die Menge

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ und } e^x - 1 \leq y \leq e^{-x} + 1\}.$$

- a) Man zeige, daß der rechte Eckpunkt von M , also der Punkt (x_r, y_r) mit

$$y_r = e^{-x_r} + 1 = e^{x_r} - 1,$$

die Koordinaten $x_r = \ln(1 + \sqrt{2})$ und $y_r = \sqrt{2}$ besitzt.

- b) Man berechne den Flächeninhalt von M .

11. (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2001*). Man gebe Beispiele für Funktionen mit folgenden Eigenschaften an oder begründe, daß keine solche Funktion existiert.

- a) $f_1 : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ist integrierbar, aber nicht stetig.
- b) $f_2 : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig, aber nicht beschränkt.
- c) $f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig, aber nicht differenzierbar.
- d) $f_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist differenzierbar, aber f_4' ist nicht stetig.

12. (*Staatsexamensaufgabe Herbst 2005*). Gegeben sei die Funktion

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(t) = \cos t \cdot \arctan t.$$

Man zeige, daß für jedes $x \in \mathbb{R}$ das Integral $\int_0^x h(t) dt$ existiert und die Funktion

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^x h(t) dt$$

an der Stelle 0 ein lokales Minimum hat.