

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“

5. (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2010*). Man bestimme die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin x}.$$

6. (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2002*). Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^{\frac{1}{x}}.$$

Man zeige, daß f auf $]0, e]$ streng monoton wächst und auf $[e, \infty[$ streng monoton fällt. Existieren die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)?$$

7. (*Staatsexamensaufgabe Herbst 2010*). Man zeige, daß die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^2}{2} - x + \sin x,$$

genau eine Nullstelle hat.

8. (*Staatsexamensaufgabe Herbst 2009*). Gegeben sei die Funktion

$$f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^{\sin x}.$$

- a) Man zeige, daß die Funktion f in $a = 0$ stetig fortgesetzt werden kann.
- b) Man beweise $\lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) = -\infty$.
- c) Man folgere, daß die Fortsetzung von f in $a = 0$ nicht differenzierbar ist.