MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2014
Blatt 11
02.07.2014

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II" — Lösungsvorschlag —

41. Wir betrachten Teilmengen X_1, $X_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$.

a) Die Aussage ist falsch: als Gegenbeispiel betrachten wir die beiden Rechtecke

$$X_1 = [-3,3] \times [-1,1] \qquad \text{und} \qquad X_2 = \,]-1,1[\, \times \,]-3,3[$$

sowie ihre Vereinigung

$$X_1 \cup X_2 = \big([-3,3] \times [-1,1]\big) \cup \big(]-1,1[\, \times \,]-3,3[\big)$$

von Tutoriumsaufgabe 41. Die beiden Mengen X_1 und $X_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ sind konvex, die Vereinigung $X_1 \cup X_2$ hingegen nicht.

b) Die Aussage ist wahr: zum Beweis seien X_1 und $X_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ beliebige konvexe Teilmengen sowie x, $y \in X_1 \cap X_2$. Damit gilt x, $y \in X_1$ und x, $y \in X_2$, und wegen der Konvexität von X_1 und X_2 verläuft die Verbindungsstrecke von x und y sowohl komplett in X_1 als auch komplett in X_2, also komplett in $X_1 \cap X_2$. Folglich ist auch $X_1 \cap X_2$ konvex.

c) Die Aussage ist wahr: zum Beweis seien X_1 und $X_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ beliebige zusammenhängende Teilmengen mit $p \in X_1 \cap X_2$ sowie x, $y \in X_1 \cup X_2$. Damit gibt es i, $j \in \{1,2\}$ mit $x \in X_i$ und $y \in X_j$, und es gilt $p \in X_i$ und $p \in X_j$; da nun X_i und X_j zusammenhängend sind, gibt es zum einen eine Kurve, die x und p verbindet und komplett in X_i verläuft, und zum anderen eine Kurve, die p und y verbindet und komplett in X_j verläuft. Wegen $X_i \subseteq X_1 \cup X_2$ und $X_j \subseteq X_1 \cup X_2$ gibt es damit eine Kurve, die x und y über p verbindet und komplett in $X_1 \cup X_2$ liegt; folglich ist auch $X_1 \cup X_2$ zusammenhängend.

d) Die Aussage ist falsch: als Gegenbeispiel betrachten wir die Kreislinie X_1 um $(0,0)$ mit Radius $r = 1$ ohne den Punkt $(1,0)$ sowie die Kreislinie X_2 um $(0,0)$ mit Radius $r = 1$ ohne den Punkt $(-1,0)$; damit sind X_1 und $X_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ zusammenhängende Teilmengen. Der Durchschnitt $X_1 \cap X_2$ ist die Kreislinie um $(0,0)$ mit Radius $r = 1$ ohne die beiden Punkte $(1,0)$ und $(-1,0)$, also zwei nichtzusammenhängende Halbkreislinien.

42. a) Wir betrachten die Teilmenge $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.

- Sei $a \in \mathbb{R}$. Für jedes $r > 0$ betrachten wir das Intervall

$$K_r(a) = \,]a - r, a + r[\,;$$

da $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt, enthält $K_r(a)$ auch irrationale Zahlen, es gilt also $K_r(a) \not\subseteq \mathbb{Q}$. Folglich besitzt $\mathbb{Q}$ keine inneren Punkte.

- Sei $a \in \mathbb{R}$. Für jedes $r > 0$ betrachten wir das Intervall

  $$K_r(a) = \,]a - r, a + r[\,;$$

  da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt, enthält $K_r(a)$ auch rationale Zahlen, es gilt also $K_r(a) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$. Folglich besitzt $\mathbb{Q}$ keine äußeren Punkte.
- Da die Teilmenge $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ weder innere noch äußere Punkte besitzt, sind alle $a \in \mathbb{R}$ Randpunkte von $\mathbb{Q}$; es ist also $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

b) Wir betrachten die Teilmenge $X = \{2\,n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ aller geraden natürlichen Zahlen sowie $Y = \mathbb{R} \setminus X$.

- Sei $x \in X$; für jedes $r > 0$ enthält $K_r(x) = \,]x - r, x + r[$ nicht nur ganze Zahlen, und damit ist $K_r(x) \not\subseteq X$, so daß x kein innerer Punkt von X ist. Damit ist X aber insbesondere keine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$.
- Sei $y \in Y$; wir treffen die folgende Fallunterscheidung:
  - Es ist $y \in \,]-\infty, 2[$; dann ist $r = 2 - y > 0$ mit

    $$K_r(y) = \,]y - r, y + r[\, \subseteq \,]-\infty, 2[\, \subseteq Y.$$

  - Es ist $y \in \,]2\,n,\ 2\,(n+1)[$ für ein $n \in \mathbb{N}$; dann ist

    $$r = \min\{y - 2\,n,\ 2\,(n+1) - y\} > 0$$

    mit

    $$K_r(y) = \,]y - r, y + r[\, \subseteq \,]2\,n,\ 2\,(n+1)[\, \subseteq Y.$$

  Damit ist y ein innerer Punkt von Y, so daß Y eine offene und damit X eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist.
- Zu jedem $r > 0$ gibt es nach dem Archimedischen Axiom ein $n \in \mathbb{N}$ mit $r < 2\,n$; damit ist $X \not\subseteq K_r(0)$. Folglich ist X nicht beschränkt, insbesondere also keine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$.

43. a) Zum Nachweis der Äquivalenz

$$\operatorname{dist}(a, X) = 0 \iff a \in \overline{X}$$

können wir die wegen $\operatorname{dist}(a, X) \geq 0$ logisch gleichwertige Äquivalenz

$$\operatorname{dist}(a, X) > 0 \iff a \notin \overline{X}$$

zeigen:

- Für „$\Longrightarrow$“ sei $r = \operatorname{dist}(a, X) > 0$. Damit ist $d(a, x) \geq r$ für alle $x \in X$, also $K_r(a) \cap X = \emptyset$. Folglich ist a ein äußerer Punkt von X, also $a \notin \overline{X}$.
- Für „$\Longleftarrow$“ sei $a \notin \overline{X}$. Damit ist a ein äußerer Punkt von X, es gibt also ein $r > 0$ mit $K_r(a) \cap X = \emptyset$; folglich ist $d(a, x) \geq r$ für alle $x \in X$, und es gilt $\operatorname{dist}(a, X) \geq r > 0$.

b) Es gilt zum einen

$$\operatorname{sdist}(a,X) < 0 \underset{\text{Def.}}{\iff} \operatorname{dist}(a,Y) > 0 \underset{\text{a)}}{\iff} a \notin \overline{Y} \iff$$
$$\iff a \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{Y} = \mathring{X} \iff a \text{ ist ein innerer Punkt von } X$$

und zum anderen

$$\operatorname{sdist}(a,X) > 0 \underset{\text{Def.}}{\iff} \operatorname{dist}(a,X) > 0 \underset{\text{a)}}{\iff} a \notin \overline{X} \iff$$
$$\iff a \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{X} = \mathring{Y} \iff a \text{ ist ein äußerer Punkt von } X;$$

zusammen ergibt sich

$$\operatorname{sdist}(a,X) = 0 \iff \big(\operatorname{sdist}(a,X) \not< 0 \text{ und } \operatorname{sdist}(a,X) \not> 0\big) \iff$$
$$\iff a \text{ ist weder ein innerer noch ein äußerer Punkt von } X \iff$$
$$\iff a \text{ ist ein Randpunkt von } X.$$

44. Zu betrachten ist die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x_1,x_2) = 1 - |x_1| - |x_2|\,,$$

sowie das Quadrat $Q = [-1;1] \times [-1;1] \subseteq \mathbb{R}^2$ mit den Eckpunkten $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$ und $(1,-1)$.

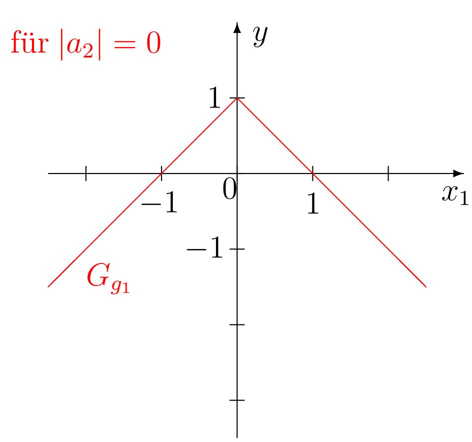
a) Sei $a = (a_1,a_2) \in \mathbb{R}^2$; das Verhalten von f auf der Parallelen p_1 zur x_1–Achse durch den Punkt a wird durch

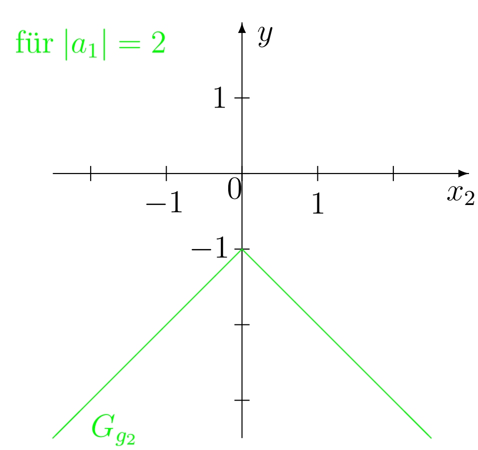
$$g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g_1(x_1) = f(x_1,a_2) = (1 - |a_2|) - |x_1|\,,$$

das Verhalten von f auf der Parallelen p_2 zur x_2–Achse durch den Punkt a durch

$$g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g_2(x_2) = f(a_1,x_2) = (1 - |a_1|) - |x_2|\,,$$

beschrieben:



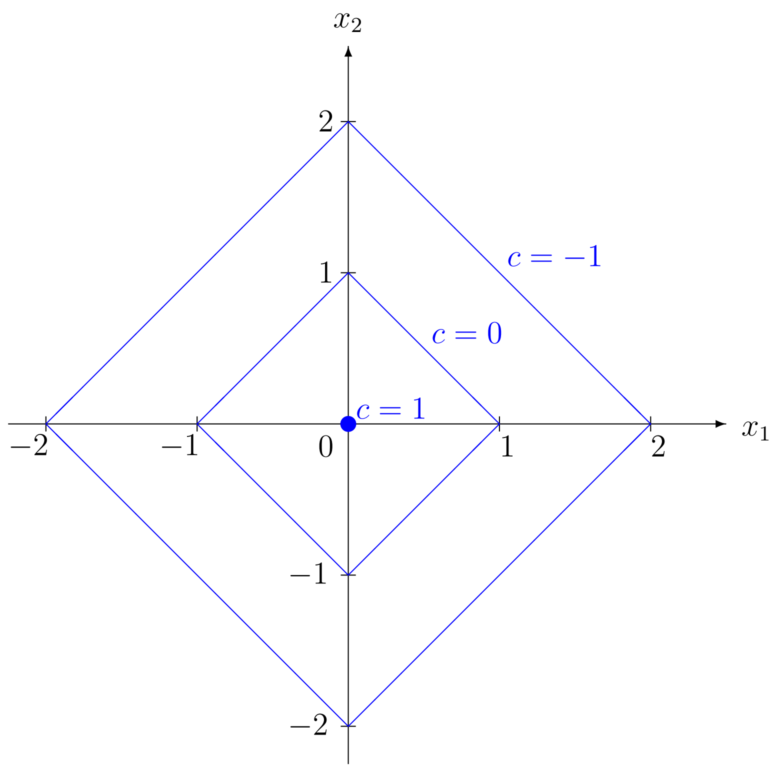


b) Sei $c \in \mathbb{R}$; für alle $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} x \in N_f(c) &\iff f(x_1, x_2) = c \iff \\ &\iff 1 - |x_1| - |x_2| = c \iff 1 - c = |x_1| + |x_2|\,, \end{aligned}$$

wodurch die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:

- Für $c > 1$ ist $1 - c < 0$, und wegen
$$|x_1| + |x_2| \geq 0$$
damit $N_f(c) = \emptyset$.
- Für $c = 1$ ist $1 - c = 0$, und wegen
$$|x_1| + |x_2| = 0 \iff \big(x_1 = 0 \text{ und } x_2 = 0\big)$$
damit $N_f(c) = \{(0, 0)\}$.
- Für $c < 1$ ist $1 - c > 0$, und wegen
$$x \in N_f(c) \iff \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 - c, & \text{falls } x_1 \geq 0 \text{ und } x_2 \geq 0 \\ x_1 - x_2 = 1 - c, & \text{falls } x_1 \geq 0 \text{ und } x_2 \leq 0 \\ -x_1 + x_2 = 1 - c, & \text{falls } x_1 \leq 0 \text{ und } x_2 \geq 0 \\ -x_1 - x_2 = 1 - c, & \text{falls } x_1 \leq 0 \text{ und } x_2 \leq 0 \end{cases}$$
ist damit $N_f(c)$ das Quadrat mit den Eckpunkten $(1 - c, 0)$, $(0, 1 - c)$, $(c - 1, 0)$ und $(0, c - 1)$.



Damit ergibt sich für den Wertebereich

$$W_f = \{c \in \mathbb{R} \mid N_f(c) \neq \emptyset\} = \left]-\infty; 1\right].$$

c) Für den Graphen G_f von f auf dem Quadrat Q ergibt sich die folgende Skizze: