MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2014
Blatt 10
25.06.2014

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II" — Lösungsvorschlag —

37. a) Für die gegebene Kurve

$$f : [0; 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad f(t) = \left(\cos^3 t, \quad \sin^3 t\right),$$

besitzt der Punkt $f(t) \in K$ für $t \in [0; 2\pi]$ vom Ursprung $(0,0)$ den Abstand

$$d(t) = \|f(t)\| = \left\|\left(\cos^3 t, \quad \sin^3 t\right)\right\| = \sqrt{\left(\cos^3 t\right)^2 + \left(\sin^3 t\right)^2};$$

aufgrund der Monotonie der Quadratwurzel ist $d(t)$ genau dann minimal bzw. maximal, wenn $d(t)^2$ minimal bzw. maximal ist. Wegen

$$\begin{aligned} d(t)^2 &= \cos^6 t + \sin^6 t = \left(\cos^2 t\right)^3 + \sin^6 t = \left(1 - \sin^2 t\right)^3 + \sin^6 t = \\ &= \left(1 - 3\sin^2 t + 3\sin^4 t - \sin^6 t\right) + \sin^6 t = 1 - 3\sin^2 t\left(1 - \sin^2 t\right) = \\ &= 1 - 3\sin^2 t\cos^2 t = 1 - \frac{3}{4}\left(2\sin t\cos t\right)^2 = 1 - \frac{3}{4}\sin^2(2t) \end{aligned}$$

ergibt sich wegen $0 \leq \sin^2(2t) \leq 1$

$$\frac{1}{4} \leq d(t)^2 \leq 1 \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{1}{2} \leq d(t) \leq 1$$

mit

$$\begin{aligned} d(t) = \frac{1}{2} &\iff d(t)^2 = \frac{1}{4} \iff \sin^2(2t) = 1 \iff \sin(2t) = \pm 1 \iff \\ &\iff 2t \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right\} \iff t \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} d(t) = 1 &\iff d(t)^2 = 1 \iff \sin^2(2t) = 0 \iff \sin(2t) = 0 \iff \\ &\iff 2t \in \{0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi\} \iff t \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}. \end{aligned}$$

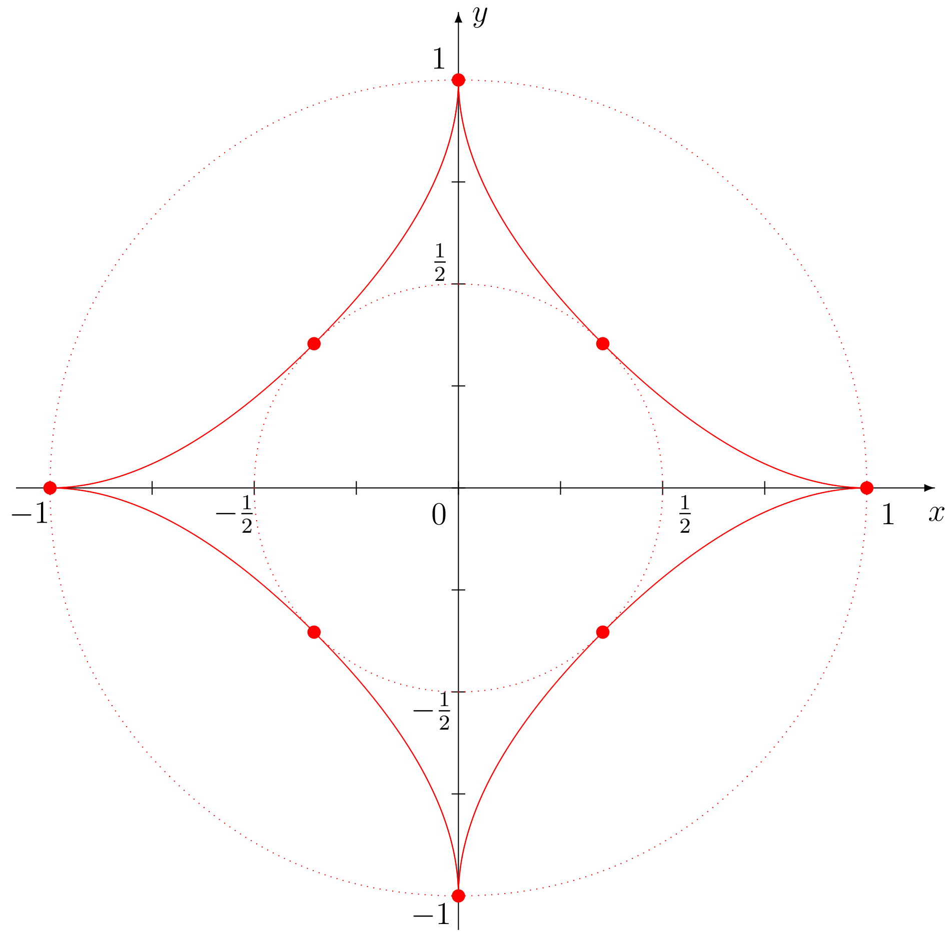
b) Gemäß a) besitzen die Kurvenpunkte

t	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$
$f(t)$	$\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$	$\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$	$\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$	$\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$

den kleinsten Abstand $\frac{1}{2}$ und

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(t)$	$(1,0)$	$(0,1)$	$(-1,0)$	$(0,-1)$	$(1,0)$

den größten Abstand 1 vom Ursprung $(0,0)$; damit ergibt sich die folgende Skizze der Bildmenge K:



c) Die gegebene Kurve f ist stetig differenzierbar mit

$$f'(t) = \left(3\cos^2 t \cdot (-\sin t)\,, 3\sin^2 t \cdot \cos t\right) = 3\sin t \cos t \cdot (-\cos t, \sin t)$$

und damit

$$\begin{aligned}
\|f'(t)\| &= \|3\sin t\cos t \cdot (-\cos t, \sin t)\| \\
&= |3\sin t\cos t| \cdot \|(-\cos t, \sin t)\| \\
&= \left|\frac{3}{2}\cdot(2\sin t\cos t)\right| \cdot \sqrt{(-\cos t)^2 + (\sin t)^2} \\
&= \left|\frac{3}{2}\cdot\sin(2t)\right| \cdot \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} \\
&= \frac{3}{2}\,|\sin(2t)|
\end{aligned}$$

für alle $t \in [0; 2\pi]$. Folglich ist die Kurve f rektifizierbar, und für die gesuchte Bogenlänge ergibt sich aufgrund der Periodizität der Sinusfunktion

$$L = \int_0^{2\pi} \|f'(t)\| \, dt = \int_0^{2\pi} \frac{3}{2} \left|\sin(2t)\right| \, dt = \frac{3}{2} \cdot 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\sin(2t)\right| \, dt =$$
$$= 6 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t) \, dt = 6 \cdot \left[\frac{-\cos(2t)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6 \cdot \left(\frac{-\cos\pi}{2} - \frac{-\cos 0}{2}\right) = 6.$$

38. a) Die gegebene Kurve

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad f(t) = \left(t^2 - 1, \; t\left(t^2 - 1\right)\right) = \left(t^2 - 1, \; t^3 - t\right),$$

ist stetig differenzierbar, und für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$f'(t) = \left(2\,t, \; 3\,t^2 - 1\right).$$

Damit besitzt f in denjenigen Kurvenpunkten $f(t)$ eine

- zur x–Achse parallele Tangente, in denen der Tangentialvektor $f'(t)$ von f und der Richtungsvektor $(1, 0)$ der x–Achse linear abhängig sind; wegen

$$3\,t^2 - 1 = 0 \iff t^2 = \frac{1}{3} \iff t = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

ist dies in

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(-\frac{2}{3}; \; \frac{2}{3\sqrt{3}}\right) \quad \text{mit} \quad f'\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}; \; 0\right)$$

und

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(-\frac{2}{3}; \; -\frac{2}{3\sqrt{3}}\right) \quad \text{mit} \quad f'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}; \; 0\right)$$

der Fall.

- zur y–Achse parallele Tangente, in denen der Tangentialvektor $f'(t)$ von f und der Richtungsvektor $(0, 1)$ der y–Achse linear abhängig sind; wegen

$$2\,t = 0 \iff t = 0$$

ist dies in

$$f(0) = (-1; \; 0) \quad \text{mit} \quad f'(0) = (0; -1)$$

der Fall.

b) Für einen Doppelpunkt $f(a) = f(b)$ mit $a < b$ gilt

$$\left(a^2 - 1, \; a\left(a^2 - 1\right)\right) = \left(b^2 - 1, \; b\left(b^2 - 1\right)\right),$$

also

$$a^2 - 1 = b^2 - 1 \implies a^2 = b^2 \implies a = -b,$$

woraus sich wegen $a < b$ schon $a < 0 < b$ ergibt, sowie

$$a\left(a^2-1\right) = b\left(b^2-1\right) \implies -b\left(b^2-1\right) = b\left(b^2-1\right),$$

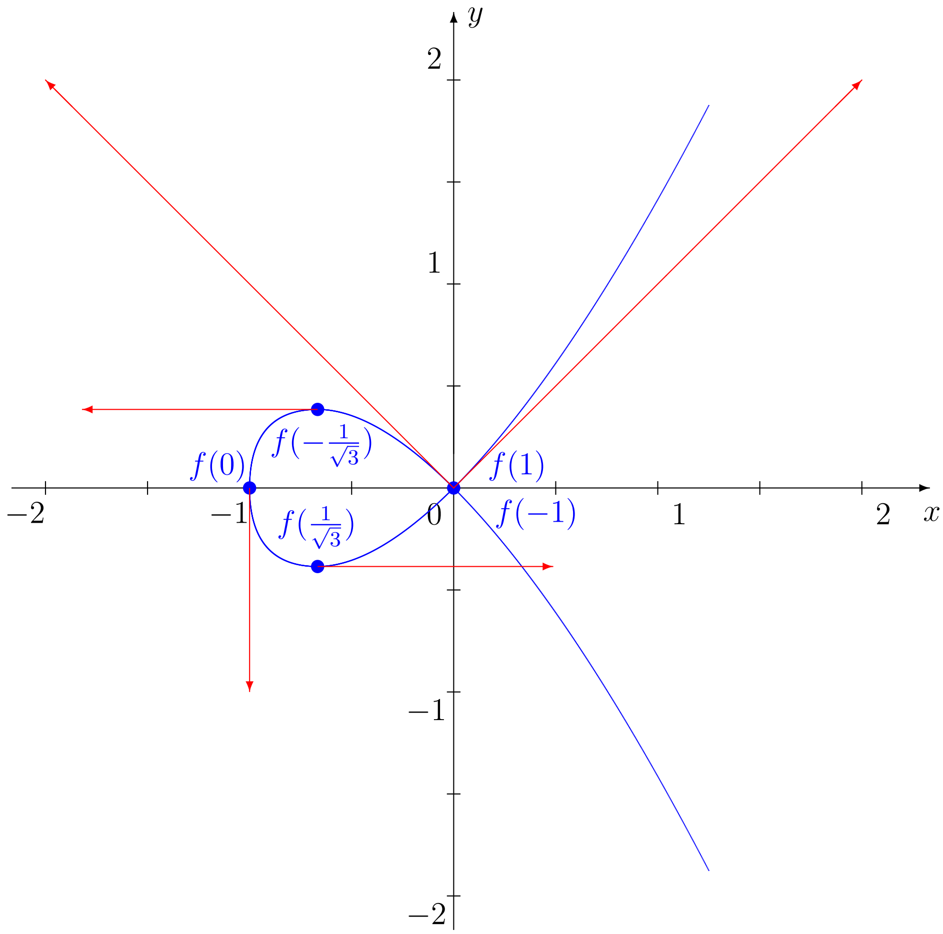
woraus sich dann $b\,(b^2-1) = 0$, wegen $b > 0$ also $b = 1$ und $a = -1$ ergibt. Folglich besitzt die Kurve f genau den Doppelpunkt

$$f(-1) = (0;0) = f(1),$$

und für die beiden Tangentialvektoren ergibt sich

$$f'(-1) = (-2;2) \qquad \text{und} \qquad f'(1) = (2;2).$$

c) Unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse ergibt sich für die Bildmenge K der Kurve f die folgende Skizze:



d) Gemäß a) ist $f(-1) = f(1)$, so daß die (hier ebenfalls mit f bezeichnete) Teilkurve

$$f : [-1;1] \to \mathbb{R}^2, \quad f(t) = \left(t^2-1,\; t\left(t^2-1\right)\right),$$

geschlossen ist; gemäß b) umrandet sie die zu betrachtende Fläche im Gegenuhrzeigersinn, also im mathematisch positiven Sinn. Da diese symmetrisch zur x–Achse liegt, ist nur der im 2. Quadranten gelegene Teil zu betrachten, der von der x–Achse und der Teilkurve

$$f : [-1;0] \to \mathbb{R}^2, \quad f(t) = (\varphi(t), \psi(t)),$$

mit

$$\varphi(t) = t^2 - 1 \qquad \text{und} \qquad \psi(t) = t\left(t^2 - 1\right)$$

für alle $t \in [-1;0]$ begrenzt wird. Wegen

$$\varphi'(t) = 2\,t < 0 \qquad \text{für alle} \quad t \in [-1,0[$$

ist φ auf $[-1,0]$ streng monoton fallend mit $\varphi(-1) = 0$ und $\varphi(0) = -1$, so daß f den Graphen der Funktion

$$h : [-1;0] \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \psi\left(\varphi^{-1}(t)\right),$$

darstellt. Für den gesuchten Flächeninhalt ergibt sich also unter Verwendung der Substitutionsregel $(*)$

$$A = 2 \cdot \int_{-1}^{0} h(x)\,dx = 2 \cdot \int_{\varphi(0)}^{\varphi(-1)} h(x)\,dx \underset{(*)}{=} 2 \int_0^{-1} \underbrace{h(\varphi(t))}_{=\psi(t)} \cdot \varphi'(t)\,dt =$$

$$= 2 \int_0^{-1} \psi(t) \cdot \varphi'(t)\,dt = 2 \int_0^{-1} t\left(t^2 - 1\right) \cdot 2\,t\,dt = 4 \int_0^{-1} \left(t^4 - t^2\right) dt =$$

$$= 4 \cdot \left[\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right]_0^{-1} = 4 \cdot \left(\frac{(-1)^5}{5} - \frac{(-1)^3}{3}\right) = 4 \cdot \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{15}.$$

39. a) Der Kurvenpunkt

$$f(t) = \left(t^2\cos(2\pi t),\ t^2\sin(2\pi t),\ t^2\right)$$

für $t \in [0;1]$ besitzt die Koordinaten

$$x = t^2\cos(2\pi t), \quad y = t^2\sin(2\pi t), \quad z = t^2,$$

so daß sich

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - z^2 &= \left(t^2\cos(2\pi t)\right)^2 + \left(t^2\sin(2\pi t)\right)^2 - \left(t^2\right)^2 = \\ &= t^4\cos^2(2\pi t) + t^4\sin^2(2\pi t) - t^4 = t^4 \underbrace{\left(\cos^2(2\pi t) + \sin^2(2\pi t)\right)}_{=1} - t^4 = 0 \end{aligned}$$

ergibt; folglich verläuft die Kurve auf dem Kreiskegel $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

b) Für alle $t \in [0;1]$ ergibt sich für den Abstand $d(t)$ des Kurvenpunkts $f(t)$ vom Punkt $p = (0,0,1)$

$$\begin{aligned} d(t)^2 &= \|f(t) - p\|^2 \\ &= \|\left(t^2\cos(2\pi t),\ t^2\sin(2\pi t),\ t^2 - 1\right)\|^2 \\ &= \left(t^2\cos(2\pi t)\right)^2 + \left(t^2\sin(2\pi t)\right)^2 + \left(t^2 - 1\right)^2 \\ &= t^4\left(\cos^2(2\pi t) + \sin^2(2\pi t)\right) + \left(t^4 - 2\,t^2 + 1\right) \\ &= 2\,t^4 - 2\,t^2 + 1 \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot \left(4\,(t^2)^2 - 4\,t^2 + 1\right) + \tfrac{1}{2} \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot \left(2\,t^2 - 1\right)^2 + \tfrac{1}{2}; \end{aligned}$$

damit ist

$$d(t)^2 = \tfrac{1}{2} \cdot \underbrace{\big(2\,t^2 - 1\big)^2}_{\geq 0} + \tfrac{1}{2} \geq \tfrac{1}{2}, \qquad \text{also} \qquad d(t) \geq \tfrac{1}{\sqrt{2}},$$

für alle $t \in [0;1]$ mit

$$d(t) = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \iff d(t)^2 = \tfrac{1}{2} \iff 2\,t^2 - 1 = 0 \iff t^2 = \tfrac{1}{2} \underset{t\geq 0}{\iff} t = \tfrac{1}{\sqrt{2}}.$$

Folglich ist für $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ der Abstand zwischen $f(t)$ und $p = (0,0,1)$ minimal und beträgt dann $d(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

c) Die Kurve f ist stetig differenzierbar, und für alle $t \in [0;1]$ gilt

$$\begin{aligned} f'(t) &= \big(2\,t\cos(2\pi t) - 2\pi\,t^2\sin(2\pi t),\ 2\,t\sin(2\pi t) + 2\pi\,t^2\cos(2\pi t),\ 2t\big) \\ &= 2t \cdot \underbrace{\big(\cos(2\pi t) - \pi\,t\sin(2\pi t),\ \sin(2\pi t) + \pi\,t\cos(2\pi t),\ 1\big)}_{=:v(t)} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \|v(t)\|^2 &= (\cos(2\pi t) - \pi\,t\sin(2\pi t))^2 + (\sin(2\pi t) + \pi\,t\cos(2\pi t))^2 + 1^2 \\ &= \big(\cos^2(2\pi t) - 2\pi\,t\cos(2\pi t)\sin(2\pi t) + \pi^2\,t^2\ \sin^2(2\pi t)\big) + \\ &\quad + \big(\sin^2(2\pi t) + 2\pi\,t\sin(2\pi t)\cos(2\pi t) + \pi^2\,t^2\ \cos^2(2\pi t)\big) + 1 \\ &= \big(\cos^2(2\pi t) + \sin^2(2\pi t)\big) + \pi^2\,t^2\,\big(\sin^2(2\pi t) + \cos^2(2\pi t)\big) + 1 \\ &= 2 + \pi^2\,t^2 \end{aligned}$$

und damit

$$\|f'(t)\| = 2\,t\,\sqrt{2 + \pi^2\,t^2}.$$

Folglich ist die Kurve f rektifizierbar, und für ihre Bogenlänge ergibt sich unter Verwendung der Substitution

$$u = g(t) = 2 + \pi^2\,t^2 \quad \text{mit} \quad \frac{du}{dt} = g'(t) = 2\pi^2 t, \quad \text{also} \quad du = 2\,\pi^2 t\,dt,$$

dann

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \|f'(t)\|\,dt = \int_0^1 2\,t\,\sqrt{2 + \pi^2\,t^2}\,dt = \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 \sqrt{2 + \pi^2\,t^2}\ (2\pi^2 t)\,dt = \\ &= \frac{1}{\pi^2}\int_{g(0)}^{g(1)} \sqrt{u}\ du = \frac{1}{\pi^2}\int_2^{2+\pi^2} u^{\frac{1}{2}}\ du = \frac{1}{\pi^2}\left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_2^{2+\pi^2} = \\ &= \frac{2}{3\pi^2}\left((2+\pi^2)^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2}{3\pi^2}\left((2+\pi^2)\sqrt{2+\pi^2} - 2\sqrt{2}\right). \end{aligned}$$

40. a) Die Funktion

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = 2\,t - \sin t,$$

ist (als Differenz einer linearen Funktion und des Sinus) stetig und differenzierbar, und für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\varphi'(t) = 2 - \underbrace{\cos t}_{\leq 1} \geq 1 > 0;$$

damit ist φ streng monoton wachsend und bildet wegen $\varphi(-\pi) = -2\,\pi$ und $\varphi(\pi) = 2\,\pi$ das Intervall $[-\pi; \pi]$ bijektiv auf das Intervall $[-2\,\pi; 2\,\pi]$ ab. Damit ist die gegebene Kurve

$$G = \{(\varphi(t);\ \psi(t)) \mid -\pi \leq t \leq \pi\}$$

mit $\varphi(t) = 2\,t - \sin t$ und $\psi(t) = 1 + \cos t$ für alle $t \in [-\pi; \pi]$ der Graph der Funktion

$$f : [-2\pi; 2\pi] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \psi\left(\varphi^{-1}(x)\right).$$

b) Da $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(t) = 2\,t - \sin t$, eine differenzierbare Funktion mit $\varphi'(t) > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ist, ist ihre Umkehrfunktion φ^{-1} ebenfalls differenzierbar; ferner ist auch $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\psi(t) = 1 + \cos t$, differenzierbar mit $\psi'(t) = -\sin t$ für alle $t \in \mathbb{R}$, so daß nach der Kettenregel die Verknüpfung $f = \psi \circ \varphi^{-1}$ differenzierbar ist, und für alle $x \in [-2\,\pi; 2\,\pi]$ gilt

$$f'(x) = \psi'(\varphi^{-1}(x)) \cdot \left(\varphi^{-1}\right)'(x) = \psi'\left(\varphi^{-1}(x)\right) \cdot \frac{1}{\varphi'\left(\varphi^{-1}(x)\right)} =$$

$$= \frac{\psi'\left(\varphi^{-1}(x)\right)}{\varphi'\left(\varphi^{-1}(x)\right)} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{-\sin t}{2 - \cos t} \quad \text{mit} \quad x = \varphi(t).$$

Wegen

$$\tan \alpha(t) = \frac{-\sin t}{2 - \cos t}$$

für alle $t \in [-\pi; \pi]$ wird der Winkel $\alpha(t)$ zwischen der x–Achse und der Kurventangente im Punkt $(\varphi(t); \psi(t))$ genau dann maximal, wenn

$$g(t) = \frac{-\sin t}{2 - \cos t}$$

maximal wird; dabei ist $g : [-\pi; \pi] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$g'(t) = \frac{(2 - \cos t) \cdot (-\cos t) - (-\sin t) \cdot \sin t}{(2 - \cos t)^2} =$$

$$= \frac{-2\,\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}{(2 - \cos t)^2} = \frac{1 - 2\cos t}{(2 - \cos t)^2}.$$

Wegen $g'(t) > 0$ für $\cos t < \frac{1}{2}$ ist g auf $\left[-\pi; -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$ streng monoton wachsend, und wegen $g'(t) < 0$ für $\cos t > \frac{1}{2}$ ist g auf $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$ streng monoton fallend; damit besitzt g in $t_1 = -\frac{\pi}{3}$ und $t_2 = \pi$ lokale Maxima mit

$$g(t_1) = \frac{-\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{2 - \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{-(-\frac{1}{2}\sqrt{3})}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

und

$$g(t_2) = \frac{-\sin\pi}{2-\cos\pi} = \frac{0}{2-(-1)} = 0.$$

Folglich erhält man

$$\tan\alpha_{\max} = g(t_1) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \text{also} \qquad \alpha_{\max} = \frac{\pi}{6} = 30^\circ.$$

c) Für den Inhalt A_F der von G und der x–Achse eingeschlossenen Fläche

$$F = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2\pi \le x \le 2\pi \text{ und } 0 \le y \le f(x)\big\}$$

erhält man wegen $f(x) \ge 0$ für alle $x \in [-2\pi;\ 2\pi]$ dann

$$\begin{aligned}
A_F &= \int_{-2\pi}^{2\pi} f(x)\,dx = \int_{\varphi(-\pi)}^{\varphi(\pi)} f(x)\,dx \underset{x=\varphi(t)}{=} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} (1+\cos t)\,(2-\cos t)\ dt \\
&= 2\cdot\int_0^{\pi} \big(2+\cos t-\cos^2 t\big)\ dt = \int_0^{\pi} \big(4+2\,\cos t-\underbrace{2\,\cos^2 t}_{=1+\cos(2t)}\big)\,dt \\
&= \int_0^{\pi} (3+2\,\cos t-\cos(2t))\ dt = \left[3\,t+2\,\sin t-\frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\pi} \\
&= \left(3\,\pi+2\,\sin\pi-\frac{\sin(2\pi)}{2}\right) - \left(3\cdot 0+2\,\sin 0-\frac{\sin 0}{2}\right) = 3\pi.
\end{aligned}$$