

Übungen zur Vorlesung „Differential- und Integralrechnung II“ — Lösungsvorschlag —

33. Zum Zeitpunkt $t \geq 0$ beträgt der Abstand der Massenpunkte

$$M_1 = (a - v_1 t; 0) \quad \text{und} \quad M_2 = (0; b - v_2 t)$$

genau

$$\begin{aligned} d(t) &= \|(a - v_1 t; 0) - (0; b - v_2 t)\| = \\ &= \|(a - v_1 t; -(b - v_2 t))\| = \sqrt{(a - v_1 t)^2 + (b - v_2 t)^2}, \end{aligned}$$

der aufgrund des Monotonieverhaltens der Quadratwurzel genau dann minimal ist, wenn der Radikand

$$h(t) = (a - v_1 t)^2 + (b - v_2 t)^2$$

minimal ist. Wegen

$$\begin{aligned} h(t) &= (a^2 - 2a v_1 t + v_1^2 t^2) + (b^2 - 2b v_2 t + v_2^2 t^2) = \\ &= (v_1^2 + v_2^2) t^2 - 2(a v_1 + b v_2) t + (a^2 + b^2) \end{aligned}$$

für alle $t \geq 0$ liegt der Graph G_h der Funktion $h : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer wegen $v_1^2 + v_2^2 > 0$ nach oben geöffneten Parabel mit dem Scheitel in

$$t_0 = -\frac{-2(a v_1 + b v_2)}{2 \cdot (v_1^2 + v_2^2)} = \frac{a v_1 + b v_2}{v_1^2 + v_2^2} > 0;$$

damit nimmt h an der Stelle t_0 das globale Minimum an mit

$$\begin{aligned} h(t_0) &= \frac{(a v_1 + b v_2)^2}{v_1^2 + v_2^2} - \frac{2(a v_1 + b v_2)^2}{v_1^2 + v_2^2} + (a^2 + b^2) = \\ &= (a^2 + b^2) - \frac{(a v_1 + b v_2)^2}{v_1^2 + v_2^2} = \frac{(a^2 + b^2)(v_1^2 + v_2^2) - (a v_1 + b v_2)^2}{v_1^2 + v_2^2} = \\ &= \frac{(a^2 v_1^2 + a^2 v_2^2 + b^2 v_1^2 + b^2 v_2^2) - (a^2 v_1^2 + 2a v_1 b v_2 + b^2 v_2^2)}{v_1^2 + v_2^2} = \\ &= \frac{a^2 v_2^2 - 2a v_2 b v_1 + b^2 v_1^2}{v_1^2 + v_2^2} = \frac{(a v_2 - b v_1)^2}{v_1^2 + v_2^2}. \end{aligned}$$

Das gesuchte Minimum d_{\min} des Abstands von M_1 und M_2 ist also

$$d_{\min} = \sqrt{h(t_0)} = \sqrt{\frac{(a v_2 - b v_1)^2}{v_1^2 + v_2^2}} = \frac{|a v_2 - b v_1|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}.$$

34. a) Wegen

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{k,1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2k}}{\sqrt{k} + 2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}}{1 + \frac{2}{\sqrt{k}}} = \sqrt{2}$$

und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{k,2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2k}{k^2 + 1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{k + \frac{1}{k}} = 0$$

gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = (\sqrt{2}; 0)$; insbesondere ist der Grenzwert $(\sqrt{2}; 0)$ auch der einzige Häufungspunkt der Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$.

b) Die Zahlenfolge

$$(a_{k,1})_{k \in \mathbb{N}_0} = \left(\cos \frac{k\pi}{2} \right)_{k \in \mathbb{N}_0} = (1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \dots)$$

divergiert; insbesondere ist auch die Punktfolge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ divergent. Für alle $j \in \mathbb{N}_0$ gilt aber

$$a_{4j} = \left(1; (-1)^{4j} \frac{4j}{4j+1} \right) = \left(1; \frac{1}{1 + \frac{1}{4j}} \right) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} (1; 1)$$

$$a_{4j+1} = \left(0; (-1)^{4j+1} \frac{4j+1}{4j+2} \right) = \left(0; -\frac{1 + \frac{1}{4j}}{1 + \frac{2}{4j}} \right) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} (0; -1)$$

$$a_{4j+2} = \left(-1; (-1)^{4j+2} \frac{4j+2}{4j+3} \right) = \left(-1; \frac{1 + \frac{2}{4j}}{1 + \frac{3}{4j}} \right) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} (-1; 1)$$

und

$$a_{4j+3} = \left(0; (-1)^{4j+3} \frac{4j+3}{4j+4} \right) = \left(0; -\frac{1 + \frac{3}{4j}}{1 + \frac{4}{4j}} \right) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} (0; -1);$$

damit besitzt die Punktfolge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ die drei Häufungspunkte $(1; 1)$, $(0; -1)$ und $(-1; 1)$.

c) Wegen

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{k,1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{\cos}_{\rightarrow 0} \frac{1}{k} = 1$$

und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{k,2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(k \sin \frac{1}{k} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{k}}{\frac{1}{k}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = (1; 1)$; insbesondere ist der Grenzwert $(1; 1)$ auch der einzige Häufungspunkt der Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

d) Wegen

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{k,1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\underbrace{k}_{\rightarrow \infty} \cdot \underbrace{\cos \frac{1}{k}}_{\rightarrow 1} \right) = \infty$$

zeigt die Folge $(a_{k,1})_{k \in \mathbb{N}}$ eine bestimmte Divergenz nach $+\infty$; folglich divergiert auch die Punktfolge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Da darüber hinaus jede Teilfolge $(a_{k_j,1})_{j \in \mathbb{N}}$ divergiert, besitzt die Punktfolge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ keinen Häufungspunkt.

35. Die Kurve

$$\gamma_a : [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \gamma_a(t) = (\cos t, \sin t, at),$$

ist stetig differenzierbar mit

$$\gamma'_a(t) = (-\sin t, \cos t, a)$$

und damit

$$\|\gamma'_a(t)\| = \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t + a^2} = \sqrt{(\sin^2 t + \cos^2 t) + a^2} = \sqrt{1 + a^2}$$

für alle $t \in [0; 2\pi]$; folglich ist γ_a rektifizierbar, und für ihre Länge L_a gilt

$$L_a = \int_0^{2\pi} \|\gamma'_a(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + a^2} dt = \left[\sqrt{1 + a^2} \cdot t \right]_0^{2\pi} = 2\pi \sqrt{1 + a^2}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} L_a \leq 7 &\iff 2\pi \sqrt{1 + a^2} \leq 7 \iff \sqrt{1 + a^2} \leq \frac{7}{2\pi} \iff \\ &\iff 1 + a^2 \leq \left(\frac{7}{2\pi}\right)^2 \iff a^2 \leq \frac{49}{4\pi^2} - 1 \iff a \leq \sqrt{\frac{49}{4\pi^2} - 1}, \end{aligned}$$

und man erhält

$$a_{\max} = \sqrt{\frac{49}{4\pi^2} - 1};$$

folglich kann die Wendeltreppe bei ihrer einen Umdrehung von $t = 0$ bis $t = 2\pi$ maximal einen Höhenunterschied von

$$h_{\max} = 2\pi \cdot a_{\max} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{49}{4\pi^2} - 1} = \sqrt{49 - 4\pi^2} \approx 3,09 \text{ m}$$

überwinden.

36. a) Die gegebene Kurve

$$\gamma : [1; 2] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t^3 - 3t + 2, 12 - 3t^2),$$

mit den Koordinatenfunktionen

$$\gamma_1(t) = t^3 - 3t + 2 \quad \text{und} \quad \gamma_2(t) = 12 - 3t^2$$

ist stetig differenzierbar mit

$$\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t)) = (3t^2 - 3, -6t)$$

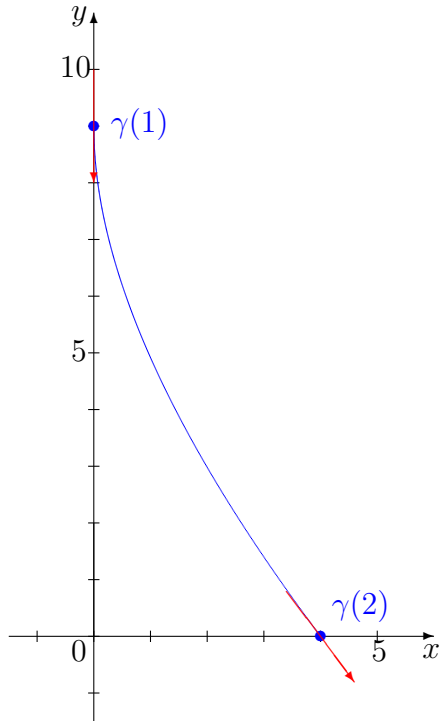
für alle $t \in [1; 2]$. Damit ergeben sich für $t = 1$ und $t = 2$ die Kurvenpunkte

$$\gamma(1) = (0, 9) \quad \text{und} \quad \gamma(2) = (4, 0)$$

mit den Tangentialvektoren

$$\gamma'(1) = (0, -6) \quad \text{und} \quad \gamma'(2) = (9, -12).$$

Damit ergibt sich für die Bildmenge $K = \{\gamma(t) \mid t \in [1; 2]\}$ folgende Skizze:



b) Wegen

$$\begin{aligned}
 \|\gamma'(t)\| &= \|(3t^2 - 3, -6t)\| = 3\|(t^2 - 1, -2t)\| = \\
 &= 3\sqrt{(t^2 - 1)^2 + (-2t)^2} = 3\sqrt{t^4 - 2t^2 + 1 + 4t^2} = \\
 &= 3\sqrt{t^4 + 2t^2 + 1} = 3\sqrt{(t^2 + 1)^2} = 3(t^2 + 1) = 3t^2 + 3,
 \end{aligned}$$

für alle $t \in [1; 2]$ ergibt sich für die gesuchte Bogenlänge L von K dann

$$L = \int_1^2 \|\gamma'(t)\| dt = \int_1^2 (3t^2 + 3) dt = \left[t^3 + 3t \right]_1^2 = (8 + 6) - (1 + 3) = 10.$$