

## Übungen zur Vorlesung „Differential- und Integralrechnung II“ — Lösungsvorschlag —

25. a) Die gegebene Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{3^n} (5n^2 + 1)} x^n$$

besitzt den Entwicklungspunkt  $a = 0$  sowie die Koeffizienten

$$c_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{3^n} (5n^2 + 1)} \neq 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Wegen

$$\begin{aligned} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| &= \left| \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{3^{n+1}} (5(n+1)^2 + 1)} \cdot \frac{\sqrt{3^n} (5n^2 + 1)}{(-1)^n} \right| = \\ &= \left| (-1) \cdot \frac{\sqrt{3^n}}{\sqrt{3^{n+1}}} \cdot \frac{5n^2 + 1}{5(n+1)^2 + 1} \right| = \sqrt{\frac{3^n}{3^{n+1}}} \cdot \frac{5n^2 + 1}{5n^2 (1 + \frac{1}{n})^2 + 1} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \frac{5 + \frac{1}{n^2}}{5(1 + \frac{1}{n})^2 + \frac{1}{n^2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \frac{5 + 0}{5(1 + 0)^2 + 0} = \frac{1}{\sqrt{3}} = c \end{aligned}$$

ergibt sich als Konvergenzradius der gegebenen Potenzreihe  $r = \frac{1}{c} = \sqrt{3}$ .

b) Wir betrachten die gegebene Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{3^n} (5n^2 + 1)} x^n \quad \text{für } x = \pm\sqrt{3}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \left| (-1)^n \frac{1}{\sqrt{3^n} (5n^2 + 1)} x^n \right| &= \frac{1}{\sqrt{3^n} (5n^2 + 1)} |x|^n = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}^n (5n^2 + 1)} \sqrt{3}^n = \frac{1}{5n^2 + 1} \leq \frac{1}{5n^2} \leq \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ ; damit besitzt die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{3^n} (5n^2 + 1)} x^n$  die (be-

kanntlich konvergente) Majorante  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  und ist folglich nach dem Majorantenkriterium (absolut) konvergent, so daß auch die gegebene Potenzreihe

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{3^n} (5n^2 + 1)} x^n$  für  $x = \pm\sqrt{3}$  (absolut) konvergiert.

26. a) Wir weisen die Konvergenz der durch

$$a_1 = 4 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

rekursiv definierten Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nach, indem wir zeigen, daß sie monoton fallend und nach unten beschränkt ist; hierfür beweisen wir  $0 \leq a_{n+1} \leq a_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit vollständiger Induktion:

„ $n = 1$ “: Es ist  $a_1 = 4$  und  $a_2 = \sqrt{6 + 4} = \sqrt{10}$  und damit  $0 \leq a_2 \leq a_1$ .

„ $n \rightarrow n + 1$ “: Aus der Induktionsvoraussetzung

$$0 \leq a_{n+1} \leq a_n$$

folgt zunächst

$$6 \leq 6 + a_{n+1} \leq 6 + a_n,$$

und man erhält wegen der Monotonie der Quadratwurzel

$$\sqrt{6} \leq \sqrt{6 + a_{n+1}} \leq \sqrt{6 + a_n},$$

insbesondere also die Induktionsbehauptung

$$0 \leq a_{n+2} \leq a_{n+1}.$$

Für den Grenzwert  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  ergibt sich mit Hilfe der Rekursionsvorschrift unter Verwendung der Stetigkeit der Quadratwurzel

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{6 + a_n} = \sqrt{6 + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = \sqrt{6 + a}$$

und damit  $a^2 = 6 + a$  bzw.  $a^2 - a - 6 = 0$ , also

$$a = \frac{1}{2} \left( -(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-6)} \right) = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2},$$

und damit  $a = -2$  oder  $a = 3$ ; wegen  $a_n \geq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist auch  $a \geq 0$ , woraus sich schließlich  $a = 3$  ergibt.

b) Die gegebene Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^n}{\sqrt{n}} x^n$$

besitzt den Entwicklungspunkt 0 sowie die Koeffizienten  $c_n = \frac{a_n^n}{\sqrt{n}}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Gemäß a) ist  $a_n \geq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  sowie  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$ , so daß sich unter Verwendung des klassischen Grenzwerts  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$  sowie der Stetigkeit der Quadratwurzel

$$\sqrt[n]{|c_n|} = \sqrt[n]{\left| \frac{a_n^n}{\sqrt{n}} \right|} = \sqrt[n]{\frac{a_n^n}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt[n]{a_n^n}}{\sqrt[n]{\sqrt{n}}} = \frac{a_n}{\sqrt{\sqrt[n]{n}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{1}} = 3 = c$$

ergibt; folglich besitzt die Potenzreihe den Konvergenzradius  $\rho = \frac{1}{c} = \frac{1}{3}$ .

c) Zur Untersuchung, ob die Potenzreihe in  $x = \frac{1}{3}$  konvergiert, ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^n}{\sqrt{n}} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^n}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{3}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$$

zu betrachten. Gemäß a) ist die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  monoton fallend und besitzt den Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$ , so daß sich sogar  $a_n \geq 3$  und folglich

$$\left(\frac{a_n}{3}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \left(\frac{3}{3}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n}} = 1^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$  ergibt; damit besitzt die zu untersuchende Reihe die (bekanntermaßen divergente) Minorante  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$  und ist damit nach dem Minorantenkriterium selbst divergent.

27. Die gegebenen Potenzreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

haben jeweils den Entwicklungspunkt 0 sowie die Koeffizientenfolge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ .

a) Konvergiert die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  gegen ein  $a \in \mathbb{R}$  mit  $a \neq 0$ , so gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $a_n \neq 0$  für alle  $n \geq n_0$ , und es gilt

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{|a|}{|a|} = 1;$$

folglich besitzt die Potenzreihe den Konvergenzradius  $\rho = 1$  und ist damit insbesondere für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x| < 1$  konvergent sowie für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x| > 1$  divergent. Für  $|x| = 1$  ergibt sich

$$|a_n x^n| = |a_n| \cdot |x|^n = |a_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |a| \neq 0;$$

damit ist die Folge  $(a_n x^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  der Reihenglieder keine Nullfolge und folglich die Potenzreihe divergent. Insgesamt konvergiert in diesem Fall die Potenzreihe genau für alle  $x \in ]-1, 1[$ .

b) Konvergiert die Folge  $(n^2 a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  gegen ein  $a \in \mathbb{R}$  mit  $a \neq 0$ , so gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $n^2 a_n \neq 0$  und damit auch  $a_n \neq 0$  für alle  $n \geq n_0$ , und es gilt

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left| \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{(n+1)^2 a_{n+1}}{n^2 a_n} \right| = \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{|(n+1)^2 a_{n+1}|}{|n^2 a_n|} = \\ &= \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} \cdot \frac{|(n+1)^2 a_{n+1}|}{|n^2 a_n|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+0)^2} \cdot \frac{|a|}{|a|} = 1; \end{aligned}$$

folglich besitzt die Potenzreihe den Konvergenzradius  $\rho = 1$  und ist damit insbesondere für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x| < 1$  konvergent sowie für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x| > 1$  divergent. Für  $|x| = 1$  ergibt sich

$$n^2 \cdot |a_n x^n| = |n^2 a_n| \cdot |x|^n = |n^2 a_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |a| > 0;$$

damit gibt es ein  $n_1 \in \mathbb{N}$ , so daß für alle  $n \geq n_1$  dann

$$n^2 \cdot |a_n x^n| \leq 2|a|, \quad \text{also} \quad |a_n x^n| \leq \frac{2|a|}{n^2}$$

gilt. Damit besitzt die Reihe  $\sum_{n=n_1}^{\infty} a_n x^n$  die (bekanntlich konvergente) Reihe

he  $\sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{2|a|}{n^2}$  als Majorante und ist nach dem Majorantenkriterium selbst

konvergent, also konvergiert auch die gegebene Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ . Insgesamt konvergiert in diesem Fall die Potenzreihe genau für alle  $x \in [-1, 1]$ .

c) Ist  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  eine monoton fallende Nullfolge, so ist die alternierende Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n, \quad \text{also die Potenzreihe} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{für} \quad x = -1,$$

nach dem Leibnizkriterium konvergent; folglich gilt für ihren Konvergenzradius zunächst  $\rho \geq 1$ . Wegen  $a_n \geq \frac{1}{n}$  für alle  $n \geq 1$  besitzt die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \text{also die Potenzreihe} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \quad \text{für} \quad x = 1,$$

die (bekanntlich divergente) harmonische Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  als Minorante und ist damit nach dem Minorantenkriterium selbst divergent, also divergiert auch

die Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  für  $x = 1$ ; folglich gilt für den Konvergenzradius

zudem  $\rho \leq 1$ . Insgesamt ergibt sich der Konvergenzradius  $\rho = 1$ , und die Potenzreihe konvergiert genau für alle  $x \in [-1; 1[$ .

28. Jede der gegebenen Funktionen

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \exp(x) = e^x,$$

und

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x},$$

läßt sich auf unterschiedlichen Wegen in ihre Taylorreihe zum Entwicklungspunkt  $a = 2$  entwickeln. Zum einen kann zunächst unter Berechnung aller Ableitungen von  $\exp$  bzw.  $f$  die Taylorreihe nach Definition als

$$T_{\exp}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n \quad \text{bzw.} \quad T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

aufgestellt und dann ihr Konvergenzbereich bestimmt werden:

- Wegen

$$\exp^{(n)}(x) = e^x \quad \text{und damit} \quad \exp^{(n)}(2) = e^2$$

für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  ist

$$T_{\exp}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp^{(n)}(2)}{n!} (x-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!} (x-2)^n$$

die Taylorreihe der Exponentialfunktion  $\exp$  zum Entwicklungspunkt  $a = 2$ ; diese Potenzreihe mit den Koeffizienten  $c_n = \frac{e^2}{n!}$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  besitzt wegen

$$\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \left| \frac{e^2}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{e^2} \right| = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

den Konvergenzradius  $\varrho = +\infty$ ; damit ist die Taylorreihe  $T_{\exp}(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  konvergent.

- Für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  besitzt die  $n$ -te Ableitung von  $f$  die Gestalt

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot n! \cdot x^{-(n+1)}$$

für alle  $x \in \mathbb{R}^+$ ; wir weisen dies mit Hilfe vollständiger Induktion nach:

Für „ $n = 0$ “ ergibt sich für alle  $x \in \mathbb{R}^+$

$$(-1)^0 \cdot 0! \cdot x^{-(0+1)} = x^{-1} = \frac{1}{x} = f(x) = f^{(0)}(x).$$

Für „ $n \rightarrow n + 1$ “ ergibt sich für alle  $x \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)})'(x) \stackrel{\text{Ind.-vor.}}{=} ((-1)^n \cdot n! \cdot x^{-(n+1)})' = \\ &= (-1)^n \cdot n! \cdot (-(n+1) \cdot x^{-(n+1)-1}) = (-1)^{n+1} \cdot (n+1)! \cdot x^{-(n+2)}. \end{aligned}$$

Damit ist

$$f^{(n)}(2) = (-1)^n \cdot n! \cdot 2^{-(n+1)} = \frac{(-1)^n n!}{2^{n+1}}$$

für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ , weswegen

$$T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(2)}{n!} (x-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (x-2)^n$$

die Taylorreihe der Funktion  $f$  zum Entwicklungspunkt  $a = 2$  ist; diese Potenzreihe mit den Koeffizienten  $c_n = \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  besitzt wegen

$$\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \left| \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+2}} \cdot \frac{2^{n+1}}{(-1)^n} \right| = \frac{1}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = c$$

den Konvergenzradius  $\varrho = \frac{1}{c} = 2$ . Damit ist die Taylorreihe  $T_f(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x-2| < 2$  konvergent sowie für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x-2| > 2$

divergent; für die  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x - 2| = 2$  ist die Folge  $\left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x - 2)^n\right)_{n \in \mathbb{N}_0}$  der Reihenglieder wegen

$$\left|\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x - 2)^n\right| = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot |x - 2|^n = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot 2^n = \frac{1}{2}$$

für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  keine Nullfolge und damit die Taylorreihe divergent. Insgesamt ergibt sich wegen

$$|x - 2| < 2 \iff -2 < x - 2 < 2 \iff 0 < x < 4$$

das Konvergenzintervall  $]0; 4[$  der Taylorreihe.

Zum anderen kann der Funktionsterm von  $\exp$  bzw.  $f$  in eine Potenzreihe um den Punkt  $a = 2$  entwickelt werden, welche dann mit der Taylorreihe  $T_{\exp}(x)$  bzw.  $T_f(x)$  zum Entwicklungspunkt  $a = 2$  übereinstimmt:

- Unter Verwendung der Exponentialreihe erhalten wir für alle  $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \exp(x) &= \exp(2 + (x - 2)) = e^2 \exp(x - 2) = \\ &= e^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x - 2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!} (x - 2)^n; \end{aligned}$$

damit ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!} (x - 2)^n$$

die Taylorreihe der Exponentialfunktion  $\exp$  an der Stelle  $a = 2$ , und diese konvergiert auf ganz  $\mathbb{R}$  gegen  $\exp$ .

- Für alle  $x \in \mathbb{R}^+$  gilt

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2 + (x - 2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{x-2}{2}\right)},$$

und unter Verwendung der für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $\left|-\frac{x-2}{2}\right| < 1$ , also für  $x \in ]0; 4[$  konvergenten geometrischen Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$  mit  $q = -\frac{x-2}{2}$  ergibt sich damit

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x-2}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (x - 2)^n;$$

damit ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (x - 2)^n$$

die Taylorreihe der Funktion  $f$  an der Stelle  $a = 2$ , und diese konvergiert auf  $]0; 4[$  gegen  $f$ .