MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2014
Blatt 6
28.05.2014

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II" — Lösungsvorschlag —

21. a) Die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin\left(x^2\right),$$

ist als Hintereinanderausführung von Sinus und der Quadratfunktion beliebig oft differenzierbar, und unter Verwendung der Kettenregel sowie (für die höheren Ableitungen) der Produktregel ergibt sich

$$f'(x) = \cos\left(x^2\right) \cdot (2\,x) = 2\,x \cdot \cos\left(x^2\right)$$

und

$$f''(x) = 2 \cdot \cos\left(x^2\right) + 2\,x \cdot \left(-\sin\left(x^2\right) \cdot (2\,x)\right) = 2\,\cos\left(x^2\right) - 4\,x^2 \cdot \sin\left(x^2\right)$$

sowie (für die bei b) benötigte Restglieddarstellung)

$$\begin{aligned} f'''(x) &= 2\left(-\sin\left(x^2\right) \cdot (2\,x)\right) - \left(8\,x \cdot \sin\left(x^2\right) + 4\,x^2 \cdot \left(\cos\left(x^2\right) \cdot (2\,x)\right)\right) \\ &= -4\,x \cdot \sin\left(x^2\right) - \left(8\,x \cdot \sin\left(x^2\right) + 8\,x^3 \cdot \cos\left(x^2\right)\right) \\ &= -12\,x \cdot \sin\left(x^2\right) - 8\,x^3 \cdot \cos\left(x^2\right) \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit ist

$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = 0 \qquad \text{und} \qquad f''(0) = 2,$$

und man erhält für das zweite Taylorpolynom T_2 von f zum Entwicklungspunkt $a = 0$ dann

$$T_2(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 = x^2$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Nach der Taylorformel gilt $f(x) = T_2(x) + R_3(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, wobei es zu jedem $x \in \mathbb{R}$ ein ξ zwischen dem Entwicklungspunkt $a = 0$ und x mit $R_3(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}\,x^3$ gibt; es ist damit

$$f(x) - T_2(x) = R_3(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}\,x^3.$$

Speziell für $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ gilt auch $\xi \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, und wir erhalten in

$$\begin{aligned}
|f(x) - T_2(x)| &= |R_3(x)| = \left|\frac{f'''(\xi)}{3!}\, x^3\right| = \frac{|f'''(\xi)|}{6} \cdot \left|x^3\right| \\
&= \frac{1}{6} \cdot \left|-12\,\xi \cdot \sin\left(\xi^2\right) - 8\,\xi^3 \cdot \cos\left(\xi^2\right)\right| \cdot |x|^3 \\
&\leq \frac{1}{6} \cdot \left(12 \cdot \underbrace{|\xi|}_{\leq \frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\left|\sin\left(\xi^2\right)\right|}_{\leq 1} + 8 \cdot \underbrace{|\xi|^3}_{\leq \left(\frac{1}{2}\right)^3} \cdot \underbrace{\left|\cos\left(\xi^2\right)\right|}_{\leq 1}\right) \cdot \underbrace{|x|^3}_{\leq \left(\frac{1}{2}\right)^3} \\
&\leq \frac{1}{6} \cdot \left(12 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + 8 \cdot \frac{1}{8} \cdot 1\right) \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{6} \cdot \underbrace{7 \cdot \frac{1}{8}}_{\leq 1} \leq \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

die Behauptung.

22. Die Funktion

$$f : [-1; \infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{1+x},$$

ist auf $]-1; \infty[$ beliebig oft stetig differenzierbar, und für alle $x > -1$ gilt

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)^{\frac{1}{2}}, \\
f'(x) &= \frac{1}{2}\,(1+x)^{-\frac{1}{2}}, \\
f''(x) &= \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(1+x)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4}\,(1+x)^{-\frac{3}{2}}, \\
f'''(x) &= -\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)(1+x)^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8}\,(1+x)^{-\frac{5}{2}}.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$f(0) = 1, \qquad f'(0) = \frac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad f''(0) = -\frac{1}{4},$$

und man erhält für das zweite Taylorpolynom T_2 von f zum Entwicklungspunkt $a = 0$ dann

$$T_2(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$$

für alle $x \in [-1; \infty[$. Nach der Taylorformel gilt $f(x) = T_2(x) + R_3(x)$ für alle $x \in [-1; \infty[$, wobei es zu jedem $x > -1$ gemäß der Lagrangeschen Darstellung ein ξ_x zwischen $a = 0$ und x mit $R_3(x) = \dfrac{f'''(\xi_x)}{3!} x^3$ gibt.

a) Für $x \to 0$ ist auch $\xi_x \to 0$ und damit wegen der Stetigkeit der dritten Ableitung f''' von f auch $f'''(\xi_x) \to f'''(0) = \frac{3}{8}$, so daß sich insgesamt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2}\,(f(x) - T_2(x)) = \frac{1}{x^2} \cdot R_3(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{f'''(\xi_x)}{3!} x^3 = \\
= \frac{1}{6} \cdot \underbrace{f'''(\xi_x)}_{\to \frac{3}{8}} \cdot \underbrace{x}_{\to 0} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{8} \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

ergibt; wir können daher $p_2 = T_2$ wählen.

b) Für $x \in [0;\infty[$ ist auch $\xi_x \in [0;\infty[$, und wir erhalten

$$|f(x) - p_2(x)| \underset{p_2=T_2}{=} |f(x) - T_2(x)| = |R_3(x)| = \left|\frac{f'''(\xi_x)}{3!}x^3\right| =$$
$$= \frac{1}{6}\cdot|f'''(\xi_x)|\cdot|x|^3 \underset{x\geq 0}{=} \frac{1}{6}\cdot\left|\frac{3}{8}\left(1+\xi_x\right)^{-\frac{5}{2}}\right|\cdot x^3 \underset{1+\xi_x\geq 1}{\leq} \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{8}x^3 = \frac{1}{16}x^3.$$

23. a) Für die gegebene (als Quadrat des Cosinus beliebig oft stetig differenzierbare) Funktion

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad f(x) = \cos^2 x,$$

zeigen wir für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gestalt ihrer $(2n)$–ten Ableitung

$$f^{(2n)}(x) = (-1)^n 2^{2n-1}\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)$$

mit vollständiger Induktion:

- für „$n = 1$" ergibt sich

$$f'(x) = 2\,\cos x\cdot(-\sin x) = -2\,\cos x\,\sin x$$

und

$$f''(x) = -2\,\left(\cos x\cdot\cos x + (-\sin x)\cdot\sin x\right) = -2\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right),$$

also

$$f^{(2)}(x) = (-1)^1\,2^{2\cdot 1-1}\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right);$$

- für „$n \to n+1$" ergibt sich aus der Induktionsannahme

$$f^{(2n)}(x) = (-1)^n\,2^{2n-1}\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)$$

zunächst

$$f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n\,2^{2n-1}\big(2\,\cos x\cdot(-\sin x) - 2\,\sin x\cdot\cos x\big) =$$
$$= (-1)^n\,2^{2n-1}\big(-4\,\cos x\cdot\sin x\big) = (-1)^{n+1}\,2^{2n+1}\,\cos x\cdot\sin x$$

und dann die Induktionsbehauptung

$$f^{(2n+2)}(x) = (-1)^{n+1}\,2^{2n+1}\big((-\sin x)\cdot\sin x + \cos x\cdot\cos x\big) =$$
$$= (-1)^{n+1}\,2^{2(n+1)-1}\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right).$$

Damit haben wir auch die Gestalt der $(2n+1)$–ten Ableitung

$$f^{(2n+1)}(x) = (-1)^{n+1}\,2^{2n+1}\,\cos x\cdot\sin x$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ermittelt.

b) Für Taylorpolynom T_{2N} von f an der Stelle $x_0 = 0$ gilt

$$T_{2N}(x) = \sum_{k=0}^{2N} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \, (x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{2N} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \, x^k$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, wobei sich gemäß a) wegen $\cos 0 = 1$ und $\sin 0 = 0$

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} f(0) = 1, & \text{falls } k = 0, \\ f^{(2n+1)}(0) = 0, & \text{falls } k = 2n+1 \text{ ungerade}, \\ f^{(2n)}(0) = (-1)^n \, 2^{2n-1}, & \text{falls } k = 2n \text{ gerade}, \end{cases}$$

ergibt; insgesamt erhält man also

$$T_{2N}(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{N} \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!} \, x^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n \, 2^{2n-1}}{(2n)!} \, x^{2n}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

c) Für jedes $N \in \mathbb{N}$ gilt nach der Taylorformel $f(x) = T_{2N}(x) + R_{2N+1}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, speziell für $x = \frac{1}{2}$ also

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = T_{2N}\left(\frac{1}{2}\right) + R_{2N+1}\left(\frac{1}{2}\right),$$

wobei es gemäß der Lagrangeschen Darstellung des Restglieds $R_{2N+1}\left(\frac{1}{2}\right)$ ein ξ zwischen $x_0 = 0$ und $x = \frac{1}{2}$ mit

$$R_{2N+1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{f^{(2N+1)}(\xi)}{(2N+1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2N+1}$$

gibt; unter Verwendung der in a) ermittelten Gestalt von $f^{(2N+1)}$ erhält man insgesamt

$$\begin{aligned} &\left| f\left(\frac{1}{2}\right) - T_{2N}\left(\frac{1}{2}\right) \right| = \left| R_{2N+1}\left(\frac{1}{2}\right) \right| = \\ &= \left| \frac{f^{(2N+1)}(\xi)}{(2N+1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2N+1} \right| = \left| \frac{(-1)^{N+1} \, 2^{2N+1} \, \cos\xi \cdot \sin\xi}{(2N+1)!} \cdot \frac{1}{2^{2N+1}} \right| = \\ &= \frac{1}{(2N+1)!} \cdot \underbrace{|\cos\xi|}_{\leq 1} \cdot \underbrace{|\sin\xi|}_{\leq 1} \leq \frac{1}{(2N+1)!}. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich etwa für $N = 3$ dann

$$\left| f\left(\frac{1}{2}\right) - T_{2N}\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq \frac{1}{(2N+1)!} = \frac{1}{7!} = \frac{1}{5040} \leq 2 \cdot 10^{-4}.$$

24. a) Für $x \in [0, \pi]$ betrachten wir das dritte Taylorpolynom T_3 des Sinus zum Entwicklungspunkt $a = 0$ und erhalten

$$\begin{aligned} T_3(x) &= \sin 0 + \sin' 0 \cdot x + \frac{\sin'' 0}{2} \cdot x^2 + \frac{\sin''' 0}{6} \cdot x^3 \\ &= \sin 0 + \cos 0 \cdot x + \frac{-\sin 0}{2} \cdot x^2 + \frac{-\cos 0}{6} \cdot x^3 \underset{\cos 0 = 1}{\overset{\sin 0 = 0}{=}} x - \frac{x^3}{6}. \end{aligned}$$

Nach der Taylorformel gilt nun $\sin x = T_3(x) + R_4(x)$, wobei es gemäß der Lagrangeschen Darstellung des Restgliedes ein ξ zwischen $a = 0$ und x mit

$$R_4(x) = \frac{\sin^{(4)}(\xi)}{4!} \cdot x^4 = \frac{\sin \xi}{4!} \cdot x^4$$

gibt; wegen $x \in [0, \pi]$ ist auch $\xi \in [0, \pi]$, und wegen $\sin \xi \geq 0$ ergibt sich

$$\sin x = T_3(x) + R_4(x) = T_3(x) + \underbrace{\frac{\sin \xi}{4!} \cdot x^4}_{\geq 0} \geq T_3(x) = x - \frac{x^3}{6}.$$

b) Die Polynomfunktion

$$p : [\pi, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad p(x) = x - \frac{x^3}{6},$$

ist differenzierbar, und für alle $x \geq \pi$ gilt

$$p'(x) = 1 - \frac{3\,x^2}{6} = 1 - \frac{x^2}{2} \underset{x \geq \pi \geq 3}{\leq} 1 - \frac{3^2}{2} = -\frac{7}{2} \leq 0;$$

damit ist p auf dem Intervall $[\pi, +\infty[$ monoton fallend, und für alle $x > \pi$ ergibt sich

$$p(x) \leq p(\pi) = \pi - \frac{\pi^3}{6} \underset{\pi \geq 3}{\leq} \pi - \frac{3^3}{6} \underset{\pi \leq \frac{7}{2}}{\leq} \frac{7}{2} - \frac{9}{2} = -1,$$

insbesondere also

$$\sin x \geq -1 \geq p(x) = x - \frac{x^3}{6}.$$