MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2014
Blatt 5
21.05.2014

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“ — Lösungsvorschlag —

17. a) Mit Hilfe partieller Integration erhält man

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = \int \underbrace{x^{-\frac{1}{2}}}_{v'(x)} \cdot \underbrace{\ln x}_{u(x)}\,dx = \underbrace{\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}}_{v(x)} \cdot \underbrace{\ln x}_{u(x)} - \int \underbrace{\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}}_{v(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'(x)}\,dx =$$

$$= 2\sqrt{x}\,\ln x - 2\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = 2\sqrt{x}\,\ln x - 2\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C =$$

$$= 2\sqrt{x}\,\ln x - 4\sqrt{x} + C = 2\sqrt{x}\,(\ln x - 2) + C.$$

Für alle $0 < \alpha < e$ gilt damit

$$\int_\alpha^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = \big[2\sqrt{x}\,(\ln x - 2)\big]_\alpha^e = 2\sqrt{e}\,(\ln e - 2) - 2\sqrt{\alpha}\,(\ln\alpha - 2)\,,$$

wobei sich mit Hilfe der Regel von de l'Hospital

$$\lim_{\alpha\to 0+} \sqrt{\alpha}\,(\ln\alpha - 2) = \lim_{\alpha\to 0+} \frac{\ln\alpha - 2}{\alpha^{-\frac{1}{2}}} \underset{\text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{“}}{\overset{\text{L'H}}{=}}$$

$$= \lim_{\alpha\to 0+} \frac{\frac{1}{\alpha}}{-\frac{1}{2}\alpha^{-\frac{3}{2}}} = \lim_{\alpha\to 0+} \big(-2\sqrt{\alpha}\big) = 0$$

ergibt. Folglich existiert das uneigentliche Integral 2. Art

$$\int_0^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\alpha\to 0+} \int_\alpha^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx =$$

$$= 2\sqrt{e}\,\underbrace{\big(\underbrace{\ln e}_{=1} - 2\big)}_{=-1} - 2\cdot\underbrace{\lim_{\alpha\to 0+}\sqrt{\alpha}\,(\ln\alpha - 2)}_{=0} = -2\sqrt{e}.$$

Dagegen existiert das uneigentliche Integral 1. Art $\displaystyle\int_e^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$ wegen

$$\int_e^b \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = \big[2\sqrt{x}\,(\ln x - 2)\big]_e^b =$$

$$= 2\underbrace{\sqrt{b}}_{\to\infty}\cdot\Big(\underbrace{\ln b}_{\to\infty} - 2\Big) - 2\sqrt{e}\,(\ln e - 2) \underset{b\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

nicht.

b) Mit Hilfe partieller Integration erhält man

$$\int e^x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x - \frac{1}{1+x^2}\right) dx =$$

$$= \int \underbrace{e^x}_{v'(x)} \cdot \underbrace{\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)}_{u(x)} dx - \int \frac{e^x}{1+x^2}\, dx =$$

$$= \underbrace{e^x}_{v(x)} \cdot \underbrace{\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)}_{u(x)} - \int \underbrace{e^x}_{v(x)} \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)}_{u'(x)} dx - \int \frac{e^x}{1+x^2}\, dx =$$

$$= e^x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) + \int \frac{e^x}{1+x^2}\, dx - \int \frac{e^x}{1+x^2}\, dx =$$

$$= e^x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) + C$$

Für alle $0 < b$ gilt damit

$$\int_0^b e^x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \left[e^x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)\right]_0^b =$$

$$= e^b \left(\frac{\pi}{2} - \arctan b\right) - e^0 \left(\frac{\pi}{2} - \arctan 0\right) = e^b \left(\frac{\pi}{2} - \arctan b\right) - \frac{\pi}{2},$$

wobei sich mit Hilfe der Regel von de l'Hospital

$$\lim_{b\to\infty} e^b \left(\frac{\pi}{2} - \arctan b\right) = \lim_{b\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan b}{e^{-b}} \underset{„\frac{0}{0}“}{\overset{\text{L'H}}{=}} \lim_{b\to\infty} \frac{-\frac{1}{1+b^2}}{-e^{-b}} =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{e^b}{1+b^2} \underset{„\frac{\infty}{\infty}“}{\overset{\text{L'H}}{=}} \lim_{b\to\infty} \frac{e^b}{2b} \underset{„\frac{\infty}{\infty}“}{\overset{\text{L'H}}{=}} \lim_{b\to\infty} \frac{e^b}{2} = \infty$$

ergibt. Folglich existiert das uneigentliche Integral 1. Art

$$\int_0^\infty e^x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x - \frac{1}{1+x^2}\right) dx =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x - \frac{1}{1+x^2}\right) dx =$$

$$= \underbrace{\lim_{b\to\infty} e^b \left(\frac{\pi}{2} - \arctan b\right)}_{=\infty} - \frac{\pi}{2} = \infty$$

und damit insbesondere auch $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x - \frac{1}{1+x^2}\right) dx$ nicht.

18. a) Wir betrachten die Funktion

$$f : [2, \infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}.$$

Für alle $x_1,\ x_2 \in [2,\infty[$ mit $x_1 \le x_2$ ergibt sich, da der natürliche Logarithmus ln streng monoton wächst, zunächst $0 < \ln 2 \le \ln x_1 \le \ln x_2$, also $0 < (\ln x_1)^2 \le (\ln x_2)^2$, und damit

$$0 < x_1 (\ln x_1)^2 \le x_2 (\ln x_2)^2 ,$$

woraus dann wegen

$$f(x_1) = \frac{1}{x_1 (\ln x_1)^2} \ge \frac{1}{x_2 (\ln x_2)^2} = f(x_2)$$

folgt, daß f eine monoton fallende Funktion ist.
Sei nun $k \in \{2, \ldots, n-1\}$. Für alle $x \in [k, k+1]$ gilt $k \le x \le k+1$ und wegen der Monotonie von f damit

$$f(k) \ge f(x) \ge f(k+1),$$

woraus aufgrund der Monotonie des Integrals

$$\int_k^{k+1} f(k)\,dx \ge \int_k^{k+1} f(x)\,dx \ge \int_k^{k+1} f(k+1)\,dx,$$

also

$$f(k) \ge \int_k^{k+1} f(x)\,dx \ge f(k+1)$$

folgt. Damit ergibt sich in

$$\sum_{k=2}^{n-1} f(k) \ge \sum_{k=2}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x)\,dx \ge \sum_{k=2}^{n-1} f(k+1),$$

also

$$\sum_{k=2}^{n-1} f(k) \ge \int_2^{n} f(x)\,dx \ge \sum_{k=3}^{n} f(k),$$

und damit

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k(\ln k)^2} \le \int_2^{n} \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx \le \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k(\ln k)^2}.$$

die Behauptung.

b) Zur Ermittlung einer Stammfunktion von f betrachten wir die Substitution

$$g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad g(t) = \ln t, \qquad \text{mit} \qquad g'(t) = \frac{1}{t}$$

und erhalten

$$\int \frac{1}{t(\ln t)^2} = \int (g(t))^{-2} \cdot g'(t)\,dt =$$

$$= \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C = -\frac{1}{\ln t} + C.$$

Damit ist

$$\int_2^n \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx = \left[-\frac{1}{\ln x}\right]_2^n = \underbrace{\left(-\frac{1}{\ln n}\right)}_{\to 0} - \left(-\frac{1}{\ln 2}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\ln 2},$$

woraus sich mit der ersten in a) gezeigten Ungleichung

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k(\ln k)^2} \leq \lim_{n\to\infty} \int_2^n \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx = \frac{1}{\ln 2}$$

ergibt.

19. a) Die gegebene Funktion

$$f : [2;\infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\ln x}{x^2} = x^{-2} \cdot \ln x,$$

ist (als Produkt einer Potenzfunktion und des natürlichen Logarithmus) stetig und (beliebig oft) differenzierbar, und für alle $x \in [2;\infty[$ gilt

$$f'(x) = (-2)\,x^{-3} \cdot \ln x + x^{-2} \cdot \frac{1}{x} = -\underbrace{x^{-3}}_{>0} \underbrace{\left(\underbrace{2\ln x}_{\geq 2\ln 2 > 1} - 1\right)}_{>0} < 0;$$

damit ist die auf dem Intervall $[2;\infty[$ definierte Funktion f (sogar streng) monoton fallend. Da darüber hinaus

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^2} \overset{\text{L'H}}{\underset{„\frac{\infty}{\infty}“}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$$

gilt, nimmt f nur positive Funktionswerte an.

b) Es ist

$$\int f(x)\,dx = \int \underbrace{x^{-2}}_{u'(x)} \cdot \underbrace{\ln x}_{v(x)}\,dx = \underbrace{\frac{x^{-1}}{-1}}_{u(x)} \cdot \underbrace{\ln x}_{v(x)} - \int \underbrace{\frac{x^{-1}}{-1}}_{u(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{v'(x)}\,dx =$$

$$= -x^{-1}\ln x + \int x^{-2}\,dx = -x^{-1}\ln x + \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{\ln x + 1}{x} + C;$$

damit ist etwa

$$F : [2;\infty[\to \mathbb{R}, \quad F(x) = -\frac{\ln x + 1}{x},$$

eine Stammfunktion von f.

c) Gemäß a) ist die gegebene Funktion $f : [2,\infty[\to \mathbb{R}$ stetig und monoton fallend mit nur positiven Funktionswerten; nach dem Integralvergleichskriterium konvergiert die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} f(n)$ genau dann, wenn das uneigentliche Integral $\int_2^{\infty} f(x)\,dx$ konvergiert. Wegen

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = -\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x + 1}{x} \overset{\text{L'H}}{\underset{„\frac{\infty}{\infty}“}{=}} -\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = -\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

ergibt sich

$$\int_2^b f(x)\,dx = \big[F(x)\big]_2^b = F(b) - F(2) \underset{b\to\infty}{\longrightarrow} -F(2) = \frac{\ln 2 + 1}{2};$$

damit konvergiert das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_2^\infty f(x)\,dx$ und folglich auch die zu betrachtende Reihe $\displaystyle\sum_{n=2}^\infty f(n) = \sum_{n=2}^\infty \frac{\ln n}{n^2}$.

20. Zu betrachten ist die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Funktionen

$$f_n : [0;1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{2nx}{(1+nx^2)^2}.$$

Für $x = 0$ ist

$$f_n(0) = \frac{2n\cdot 0}{\left(1+n\cdot 0^2\right)^2} = \frac{0}{1} = 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit insbesondere

$$\lim_{n\to\infty} f_n(0) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0,$$

und für $x \in\,]0;1]$ ergibt sich

$$f_n(x) = \frac{2nx}{(1+nx^2)^2} = \frac{2nx}{(n(\frac{1}{n}+x^2))^2} = \frac{2nx}{n^2\cdot(\frac{1}{n}+x^2)^2} =$$
$$= \frac{\frac{2x}{n}}{(\frac{1}{n}+x^2)^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{0}{(0+x^2)^2} = \frac{0}{x^4} = 0;$$

damit konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_n$ punktweise gegen die Grenzfunktion

$$f : [0;1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0,$$

die als konstante Nullfunktion insbesondere integrierbar ist mit

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0.$$

Zur Bestimmung von $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$ für $n \in \mathbb{N}$ verwenden wir die Substitution

$$g : [0;1] \to \mathbb{R}, \quad g(x) = 1 + n\,x^2,$$

mit $g'(x) = 2nx$ für alle $x \in [0;1]$ und erhalten

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \frac{2nx}{(1+nx^2)^2}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{(g(x))^2}\,g'(x)\,dx = \int_{g(0)}^{g(1)} \frac{1}{u^2}\,du =$$
$$= \left[-\frac{1}{u}\right]_1^{1+n} = \left(-\frac{1}{1+n}\right) - \left(-\frac{1}{1}\right) = 1 - \frac{1}{1+n}.$$

Damit ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{1+n}\right) = 1 - 0 = 1 \neq 0 = \int_0^1 f(x)\,dx.$$