MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2014
Blatt 4
14.05.2014

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“ — Lösungsvorschlag —

13. a) Zu betrachten ist die Integralfunktion

$$g : [2, \infty[\to \mathbb{R}, \quad g(a) = \int_2^a \frac{x^2 - 2\,x - 1}{x - x^3}\,dx;$$

die gebrochenrationale Integrandenfunktion

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^2 - 2\,x - 1}{x - x^3},$$

besitzt wegen

$$x - x^3 = x\left(1 - x^2\right) = x\,(1 - x)\,(1 + x) = 0 \iff$$
$$\iff (x = 0 \ \text{ oder } \ 1 - x = 0 \ \text{ oder } \ 1 + x = 0) \iff x \in \{-1, 0, 1\}$$

die maximale Definitionsmenge $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$, so daß $D =]1, \infty[$ das maximale Definitionsintervall ist, in dem die untere Integrationsgrenze 2 liegt. Wir unterwerfen f der Partialbruchzerlegung und bestimmen Konstanten α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{1 - x} + \frac{\gamma}{1 + x} \qquad \text{für alle} \quad x \in]1, \infty[\,;$$

wegen

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{1 - x} + \frac{\gamma}{1 + x} &= \frac{\alpha \cdot (1 - x)\,(1 + x) + \beta \cdot x\,(1 + x) + \gamma \cdot x\,(1 - x)}{x\,(1 - x)\,(1 + x)} \\
&= \frac{\alpha \cdot (1 - x^2) + \beta \cdot (x + x^2) + \gamma \cdot (x - x^2)}{x - x^3} \\
&= \frac{(-\alpha + \beta - \gamma)\,x^2 + (\beta + \gamma)\,x + \alpha}{x - x^3}
\end{aligned}$$

für alle $x \in]1, \infty[$ ergibt sich über den Koeffizientenvergleich

$$-\alpha + \beta - \gamma = 1 \qquad \text{und} \qquad \beta + \gamma = -2 \qquad \text{und} \qquad \alpha = -1,$$

also $\beta - \gamma = 1 + \alpha = 0$ bzw. $\beta = \gamma$, und damit $\beta = \gamma = -1$. Wegen

$$f(x) = \frac{-1}{x} + \frac{-1}{1 - x} + \frac{-1}{1 + x} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1}$$

für alle $x \in \,]1,\infty[$ ergibt sich für $a \geq 2$ damit

$$\begin{aligned}
g(a) &= \int_2^a \frac{x^2 - 2\,x - 1}{x - x^3}\,dx \\
&= \int_2^a \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) dx \\
&= \Big[-\ln|x| + \ln|x-1| - \ln|x+1|\Big]_2^a \\
&= \Big(-\ln|a| + \ln|a-1| - \ln|a+1|\Big) - \Big(-\ln 2 + \ln 1 - \ln 3\Big) \\
&\underset{a\geq 2}{=} -\ln a + \ln(a-1) - \ln(a+1) + \ln 6 \;=\; \ln\frac{6\,(a-1)}{a\,(a+1)}.
\end{aligned}$$

b) Die Integrandenfunktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist als gebrochen–rationale Funktion stetig, und damit ist ihre Integralfunktion $g : [2,\infty[\,\to \mathbb{R}$ nach dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung differenzierbar, und für alle $x \in [2,\infty[$ gilt

$$g'(x) = f(x) = \frac{x^2 - 2\,x - 1}{x - x^3} = \frac{(x-1)^2 - 2}{x\,(1-x^2)}.$$

Für alle $x \in [2,\infty[$ gilt $2 \leq x$, also $x > 0$ und $1 - x^2 \leq 1 - 2^2 = -3 < 0$, und damit für den Nenner $x\,(1-x^2) < 0$; des weiteren ergibt sich:

- für alle $x \in \big[2, 1+\sqrt{2}\big[$ gilt $2 \leq x < 1+\sqrt{2}$, also $1 \leq x - 1 < \sqrt{2}$ mit $(x-1)^2 < 2$, und damit für den Zähler $(x-1)^2 - 2 < 0$, insgesamt also

$$g'(x) = \frac{\overbrace{(x-1)^2 - 2}^{<0}}{\underbrace{x\,\big(1-x^2\big)}_{<0}} > 0,$$

  so daß die stetige Funktion g auf dem Intervall $\big[2, 1+\sqrt{2}\big]$ streng monoton wächst: es ist also $f(x) < f(1+\sqrt{2})$ für alle $x \in \big[2, 1+\sqrt{2}\big[$.

- für alle $x \in \big]1+\sqrt{2}, \infty\big[$ gilt $x > 1+\sqrt{2}$, also $x-1 > \sqrt{2}$ mit $(x-1)^2 > 2$, und damit für den Zähler $(x-1)^2 - 2 > 0$, insgesamt also

$$g'(x) = \frac{\overbrace{(x-1)^2 - 2}^{>0}}{\underbrace{x\,\big(1-x^2\big)}_{<0}} < 0,$$

  so daß die stetige Funktion g auf dem Intervall $\big[1+\sqrt{2}, \infty\big[$ streng monoton fällt: es ist also $f(x) < f(1+\sqrt{2})$ für alle $x \in \big]1+\sqrt{2}, \infty\big[$.

Damit besitzt $g : [2,\infty[\,\to \mathbb{R}$ in $a = 1+\sqrt{2}$ ein globales Maximum.

14. Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ ergibt sich mit Hilfe partieller Integration

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int_0^\pi (\sin x)^n \, dx \;=\; \int_0^\pi \underbrace{(\sin x)^{n-1}}_{u(x)} \cdot \underbrace{\sin x}_{v'(x)} \, dx \\
&= \Big[\underbrace{(\sin x)^{n-1}}_{u(x)} \cdot \underbrace{(-\cos x)}_{v(x)} \Big]_0^\pi - \int_0^\pi \underbrace{(n-1)(\sin x)^{n-2} \cdot \cos x}_{u'(x)} \cdot \underbrace{(-\cos x)}_{v(x)} \, dx \\
&= \Big((\sin\pi)^{n-1} \cdot (-\cos\pi) - (\sin 0)^{n-1} \cdot (-\cos 0) \Big) + \\
&\qquad\qquad + (n-1) \cdot \int_0^\pi (\sin x)^{n-2} \cdot (\cos x)^2 \, dx \\
&= \Big(0^{n-1} \cdot 1 - 0^{n-1} \cdot (-1) \Big) + (n-1) \cdot \int_0^\pi (\sin x)^{n-2} \cdot \big(1 - (\sin x)^2\big) \, dx \\
&= (n-1) \cdot \int_0^\pi \big((\sin x)^{n-2} - (\sin x)^n \big) \, dx \\
&= (n-1) \cdot \Big(\int_0^\pi (\sin x)^{n-2} \, dx - \int_0^\pi (\sin x)^n \, dx \Big) \\
&= (n-1) \cdot (I_{n-2} - I_n) \;=\; (n-1) \cdot I_{n-2} - (n-1) \cdot I_n,
\end{aligned}
$$

woraus sich

$$
n \cdot I_n = (n-1) \cdot I_{n-2} \qquad \text{und damit} \qquad I_n = \frac{n-1}{n} \cdot I_{n-2}
$$

ergibt.

15. a) Durch dreimalige partielle Integration erhält man

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \underbrace{x^3}_{u_1(x)} \underbrace{\cos x}_{v_1'(x)} \, dx &= \big[\underbrace{x^3}_{u_1(x)} \underbrace{\sin x}_{v_1(x)} \big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \underbrace{3\,x^2}_{u_1'(x)} \underbrace{\sin x}_{v_1(x)} \, dx \\
&= \big((2\pi)^3 \underbrace{\sin(2\pi)}_{=0} - 0^3 \underbrace{\sin 0}_{=0} \big) + 3 \int_0^{2\pi} \underbrace{x^2}_{u_2(x)} \underbrace{(-\sin x)}_{v_2'(x)} \, dx \\
&= 3 \Big(\big[\underbrace{x^2}_{u_2(x)} \underbrace{\cos x}_{v_2(x)} \big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \underbrace{2\,x}_{u_2'(x)} \underbrace{\cos x}_{v_2(x)} \, dx \Big) \\
&= 3 \big((2\pi)^2 \underbrace{\cos(2\pi)}_{=1} - 0^2 \underbrace{\cos 0}_{=1} \big) - 6 \int_0^{2\pi} \underbrace{x}_{u_3(x)} \underbrace{\cos x}_{v_3'(x)} \, dx \\
&= 12\pi^2 - 6 \Big(\big[\underbrace{x}_{u_3(x)} \underbrace{\sin x}_{v_3(x)} \big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \underbrace{1}_{u_3'(x)} \underbrace{\sin x}_{v_3(x)} \, dx \Big) \\
&= 12\pi^2 - 6 \big(2\pi \underbrace{\sin(2\pi)}_{=0} - 0 \underbrace{\sin 0}_{=0} \big) - 6 \int_0^{2\pi} (-\sin x) \, dx \\
&= 12\pi^2 - \big[\cos x \big]_0^{2\pi} = 12\pi^2 - \big(\underbrace{\cos(2\pi)}_{=1} - \underbrace{\cos 0}_{=1} \big) = 12\pi^2.
\end{aligned}
$$

b) Die gegebene Funktion

$$f:]0,\infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\sin x}{x},$$

ist als Quotient des Sinus und der Identität differenzierbar mit

$$f'(x) = \frac{\cos x \cdot x - \sin x \cdot 1}{x^2} = \frac{1}{x} \cdot \cos x - \frac{1}{x^2} \cdot \sin x$$

für alle $x > 0$. Für alle $x \in \left[\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{4}\pi\right]$ gilt dabei $\cos x \leq 0$ und $\sin x \geq 0$, also

$$f'(x) = \underbrace{\underbrace{\frac{1}{x}}_{>0} \cdot \underbrace{\cos x}_{\leq 0}}_{\leq 0} - \underbrace{\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{>0} \cdot \underbrace{\sin x}_{\geq 0}}_{\geq 0} \leq 0,$$

und folglich ist die Funktion f auf dem Intervall $\left[\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{4}\pi\right]$ monoton fallend.

c) Für alle $x \in \left[\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{4}\pi\right]$ gilt

$$\tfrac{1}{2}\pi \leq x \leq \tfrac{3}{4}\pi;$$

da f gemäß b) auf $\left[\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{4}\pi\right]$ monoton fallend ist, folgt daraus

$$f(\tfrac{1}{2}\pi) \geq f(x) \geq f(\tfrac{3}{4}\pi)$$

mit

$$f(\tfrac{1}{2}\pi) = \frac{\sin(\frac{1}{2}\pi)}{\frac{1}{2}\pi} = \frac{1}{\frac{1}{2}\pi} = \frac{2}{\pi}$$

und

$$f(\tfrac{3}{4}\pi) = \frac{\sin(\frac{3}{4}\pi)}{\frac{3}{4}\pi} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{3}{4}\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{3\pi},$$

insgesamt also

$$\frac{2\sqrt{2}}{3\pi} \leq f(x) \leq \frac{2}{\pi}.$$

Wegen der Monotonie des Integrals ergibt sich daraus

$$\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{2\sqrt{2}}{3\pi}\, dx \leq \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} f(x)\, dx \leq \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{2}{\pi}\, dx$$

mit

$$\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{2\sqrt{2}}{3\pi}\, dx = \frac{2\sqrt{2}}{3\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \qquad \text{und} \qquad \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{2}{\pi}\, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2},$$

insgesamt also die zu zeigende Abschätzung

$$\frac{1}{3\sqrt{2}} \leq \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} f(x)\, dx \leq \frac{1}{2}.$$

16. Die zu betrachtenden bestimmten Integrale

$$\int_a^1 \frac{dx}{1+x^2} \qquad \text{und} \qquad \int_1^{\frac{1}{a}} \frac{dx}{1+x^2}$$

besitzen unterschiedliche Integrationsgrenzen, wodurch die Anwendung der Substitutionsregel nahegelegt wird. Mit der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

und der Substitution

$$g :]0, \infty[\to \mathbb{R}, \quad g(t) = \frac{1}{t},$$

mit

$$g'(t) = -\frac{1}{t^2} \qquad \text{für alle} \qquad t \in]0, \infty[$$

erhält man

$$\int_1^{\frac{1}{a}} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{g(1)}^{g(a)} f(x)\, dx = \int_1^a f(g(t)) \cdot g'(t)\, dt =$$
$$= \int_1^a \frac{1}{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = -\int_1^a \frac{1}{t^2+1}\, dt = \int_a^1 \frac{dt}{1+t^2}$$

und damit die zu zeigende Gleichheit

$$\int_a^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_1^{\frac{1}{a}} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Unter Verwendung der Stammfunktion $\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von f ergibt sich damit

$$\big[\arctan x\big]_a^1 = \big[\arctan\big]_1^{\frac{1}{a}},$$

also

$$\arctan 1 - \arctan a = \arctan \frac{1}{a} - \arctan 1,$$

woraus sich wegen $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ die Funktionalgleichung des Arcus tangens

$$\arctan \frac{1}{a} + \arctan a = \frac{\pi}{2}.$$

ergibt.