MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2014
Blatt 2
30.04.2014

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“ — Lösungsvorschlag —

5. a) Mit der Stetigkeit des Cosinus (an der Stelle 0) und des natürlichen Logarithmus (an der Stelle 1) gilt

$$\ln\big(\underbrace{\cos t}_{\to\cos 0=1}\big) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \ln 1 = 0 \qquad \text{sowie} \qquad t^2 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

und mit der Regel von de l'Hospital ergibt sich damit

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln(\cos t)}{t^2} \underset{„\frac{0}{0}“}{\overset{\text{L'H}}{=}} \lim_{t\to 0}\frac{\frac{-\sin t}{\cos t}}{2t} = -\frac{1}{2}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t\cos t} \underset{„\frac{0}{0}“}{\overset{\text{L'H}}{=}}$$
$$= -\frac{1}{2}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\cos t}{\cos t - t\sin t} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-0\cdot 0} = -\frac{1}{2};$$

dabei geht die Stetigkeit von Sinus und Cosinus (an der Stelle 0) ein.

b) Gemäß der Definition der allgemeinen Potenz

$$a^b = \exp(b\ln a) \qquad \text{für alle} \quad a\in\mathbb{R}^+ \quad \text{und} \quad b\in\mathbb{R}$$

ergibt sich

$$\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n = \exp\left(n\cdot\ln\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

mit

$$n\cdot\ln\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{\ln\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2} \qquad \text{für alle} \quad n\in\mathbb{N}.$$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ erhält man mit Hilfe von a) insbesondere

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\ln\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2} = \lim_{t\to 0}\frac{\ln(\cos t)}{t^2} = -\frac{1}{2},$$

woraus mit der Stetigkeit der Exponentialfunktion (an der Stelle $-\frac{1}{2}$) dann

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\exp\left(n\cdot\ln\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

folgt.

6. a) Die gegebene Funktion

$$h :]0;\infty[\to \mathbb{R}, \quad h(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1},$$

ist (als Summe und Komposition des natürlichen Logarithmus und gebrochenrationaler Funktionen) stetig und (beliebig oft) differenzierbar, und für alle $x \in]0;\infty[$ gilt

$$h'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} - \left(-\frac{1}{(x+1)^2}\right) = \frac{-1}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)} + \frac{1}{(x+1)^2} =$$
$$= \frac{-1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-(x+1)+x}{x(x+1)^2} = -\frac{1}{x(x+1)^2} < 0;$$

damit ist h streng monoton fallend. Ferner gilt (wegen der Stetigkeit der Logarithmusfunktion an der Stelle 1)

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\underbrace{\ln\underbrace{\left(1+\frac{1}{x}\right)}_{\to 1+0=1}}_{\to \ln 1 = 0} - \underbrace{\frac{1}{x+1}}_{\to 0}\right) = 0,$$

so daß sich insgesamt $h(x) > 0$ für alle $]0;\infty[$ ergibt.

b) Für die gegebene Funktion

$$f :]0;\infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x,$$

ergibt sich gemäß der Definition der allgemeinen Potenz $a^b = e^{b\ln a}$ für alle $a \in \mathbb{R}^+$ und $b \in \mathbb{R}$ dann

$$f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

und folglich unter Verwendung von Ketten– und Produktregel

$$f'(x) = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} \cdot \left(1\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x\cdot\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}\right) =$$
$$= e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} \cdot \underbrace{\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right)}_{=h(x)} = \underbrace{e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}}_{>0} \cdot \underbrace{h(x)}_{\substack{>0 \\ \text{a)}}} > 0$$

für alle $x \in]0;\infty[$; folglich ist die Funktion f streng monoton steigend. Unter Verwendung der Regel von de l'Hospital ergibt sich ferner

$$\lim_{x\to 0+} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0+}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \overset{\text{L'H}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to 0+}\frac{\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+}\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 0$$

sowie

$$\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \overset{\text{L'H}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1,$$

woraus mit der Stetigkeit der Exponentialfunktion

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e^0 = 1$$

sowie

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e^1 = e$$

folgt; damit erhält man (unter Verwendung der strengen Monotonie von f) zunächst $W_f \subseteq \,]1;e[$. Zum Nachweis von „$\supseteq$“ sei $y \in \,]1;e[$;

- wegen $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 1$ gibt es ein $0 < a < 1$ mit $f(a) < y$, und
- wegen $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = e$ gibt es ein $b > 1$ mit $y < f(b)$,

so daß für die (als Verknüpfung stetiger Funktionen selbst) stetige Funktion f nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in \,]a;b[$ mit $f(\xi) = y$ existiert. Damit ist $y = f(\xi) \in W_f$ und $W_f = \,]1;e[$.

7. Für $a,\, b \in \,]0,1[$ ist die Gleichung

$$(*) \qquad a^x + b^x = 1$$

zu betrachten; für alle $x \in \,]0,\infty[$ gilt

$$a^x + b^x = 1 \iff a^x + b^x - 1 = 0,$$

so daß die Lösungen der Gleichung $(*)$ mit den Nullstellen der Funktion

$$f : \,]0,\infty[\, \to \mathbb{R}, \quad f(x) = a^x + b^x - 1,$$

übereinstimmen.

Wegen $a,\, b \in \,]0,1[$ fallen die Exponentialfunktionen $x \mapsto a^x$ und $x \mapsto b^x$ streng monoton; damit ist auch f streng monoton fallend, besitzt also insbesondere höchstens eine Nullstelle.

Ferner ist f als Summe zweier Exponentialfunktionen und einer konstanten Funktion stetig, und wegen $0 < a < 1$ und $0 < b < 1$ gilt

$$f(x) = \underbrace{a^x}_{\to a^0=1} + \underbrace{b^x}_{\to b^0=1} -1 \underset{x\to 0+}{\longrightarrow} 1$$

und

$$f(x) = \underbrace{a^x}_{\to 0} + \underbrace{b^x}_{\to 0} -1 \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} -1;$$

damit gibt es ein $\alpha < 1$ mit $f(\alpha) > 0$ und ein $\beta > 1$ mit $f(\beta) < 0$, so daß f nach dem Nullstellensatz mindestens eine Nullstelle in $]\alpha,\beta[\, \subseteq \,]0,\infty[$ besitzt.

Damit hat f genau eine Nullstelle, so daß die Gleichung $(*)$ eine eindeutig bestimmte Lösung in $]0,\infty[$ besitzt.

8. a) Die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2+1},$$

ist als gebrochenrationale Funktion beliebig oft differenzierbar, und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt nach der Quotientenregel

$$f'(x) = \frac{3\,x^2 \cdot (x^2+1) - x^3 \cdot 2\,x}{(x^2+1)^2} = \frac{(3\,x^4 + 3\,x^2) - 2\,x^4}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4 + 3\,x^2}{(x^2+1)^2};$$

wegen

$$f'(x) = \frac{\overbrace{x^2}^{>0} \cdot \overbrace{(x^2+3)}^{>0}}{\underbrace{(x^2+1)^2}_{>0}} > 0 \qquad \text{für alle} \quad x \neq 0$$

ist f als stetige Funktion zum einen auf $]-\infty, 0]$ und zum anderen auf $[0, \infty[$ streng monoton wachsend, ingesamt also eine auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wachsende Funktion.

b) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gemäß a) streng monoton wachsend und besitzt daher insbesondere eine Umkehrfunktion $g = f^{-1} : W_f \to \mathbb{R}$, wobei W_f den Wertebereich von f bezeichne; da f zudem auf einem Intervall definiert ist, ist die Umkehrfunktion g auf jeden Fall stetig.

Darüber hinaus ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar, und die Umkehrfunktion $g : W_f \to \mathbb{R}$ ist damit an genau denjenigen Stellen $b = f(a) \in W_f$ mit $f'(a) \neq 0$ differenzierbar, wegen

$$f'(a) = 0 \iff \frac{a^2 \cdot (a^2+3)}{(a^2+1)^2} = 0 \underset{a^2+3>0}{\iff} a^2 = 0 \iff a = 0$$

genau im Falle $a \neq 0$. Folglich besitzt f genau für $a \neq 0$ lokal eine differenzierbare Umkehrfunktion.

c) Für $a = 1$ gilt

$$f(a) = f(1) = \frac{1^3}{1^2+1} = \frac{1}{2} \quad \text{mit} \quad f'(a) = f'(1) = \frac{1^4 + 3 \cdot 1^2}{(1^2+1)^2} = \frac{4}{2^2} = 1,$$

so daß sich für $b = f(a) = \frac{1}{2}$ gemäß der Ableitungsregel für die Umkehrfunktion

$$g'\left(\frac{1}{2}\right) = g'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{1} = 1,$$

ergibt.