

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“ — Lösungsvorschlag —

1. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Einschränkung f des natürlichen Logarithmus auf das abgeschlossene Intervall $[n; n+1]$, es ist also

$$f : [n; n+1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln x.$$

Damit ist f differenzierbar mit $f'(x) = \frac{1}{x}$ für alle $x \in [n; n+1]$; insbesondere genügt f den Voraussetzungen des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, nämlich Stetigkeit auf $[n; n+1]$ und Differenzierbarkeit auf $]n; n+1[$. Der Mittelwertsatz liefert nun ein $\xi \in]n; n+1[$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n}, \quad \text{also} \quad \frac{1}{\xi} = \ln(n+1) - \ln(n).$$

Wegen

$$n < \xi < n+1 \quad \text{folgt} \quad \frac{1}{n} > \frac{1}{\xi} > \frac{1}{n+1},$$

so daß sich insgesamt

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n},$$

insbesondere also die Behauptung

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$$

ergibt. Damit gilt die Beziehung

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

auch für alle $k \in \{1, \dots, n\}$, und man erhält zum einen

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} &\geq \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) = \sum_{k=1}^n \ln(k+1) - \sum_{k=1}^n \ln(k) = \\ &= \sum_{k=2}^{n+1} \ln(k) - \sum_{k=1}^n \ln(k) = \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1) \end{aligned}$$

und zum anderen

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - 1 &= \left(1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \right) - 1 = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{n-1} (\ln(k+1) - \ln(k)) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) = \\ &= \sum_{k=2}^n \ln(k) - \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) = \ln(n) - \ln(1) = \ln(n). \end{aligned}$$

2. Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin \frac{x^3 + x}{2},$$

ist als Verknüpfung des Sinus und einer Polynomfunktion stetig und differenzierbar, und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt mit der Kettenregel

$$f'(x) = \left(\cos \frac{x^3 + x}{2} \right) \cdot \frac{3x^2 + 1}{2}.$$

Seien nun $x, y \in [-1; 1]$; da für $x = y$ die zu zeigende Ungleichung trivial ist, können wir $x \neq y$ und damit sogar $x > y$ annehmen. Wir wenden den Mittelwertsatz der Differentialrechnung für die Funktion f auf dem Intervall $[y; x]$ an und erhalten ein $\xi \in]y; x[$ mit

$$f(x) - f(y) = f'(\xi) \cdot (x - y).$$

Wegen $\xi \in]y; x[\subseteq [-1; 1]$ ist $-1 \leq \xi \leq 1$, also $-1 \leq \xi^3 \leq 1$, und damit $-2 \leq \xi^3 + \xi \leq 2$, also $-1 \leq \frac{\xi^3 + \xi}{2} \leq 1$; aufgrund des Monotonieverhaltens des Cosinus erhält man also $\cos \frac{\xi^3 + \xi}{2} \geq \cos 1$. Ferner ist $\xi^2 \geq 0$ und damit $\frac{3\xi^2 + 1}{2} \geq \frac{1}{2}$, woraus sich

$$f'(\xi) = \underbrace{\cos \frac{\xi^3 + \xi}{2}}_{\geq \cos 1} \cdot \underbrace{\frac{3\xi^2 + 1}{2}}_{\geq \frac{1}{2}} \geq \frac{\cos 1}{2} > 0$$

ergibt. Zusammenfassend erhält man

$$\left| \sin \frac{x^3 + x}{2} - \sin \frac{y^3 + y}{2} \right| = |f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| \cdot |x - y| \geq \frac{\cos 1}{2} \cdot |x - y|.$$

3. a) Wir weisen nach, daß die gegebene Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ an jeder Stelle $a \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist und die Ableitung $f'(a) = 0$ besitzt. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq a$ gilt nach Voraussetzung

$$|f(x) - f(a)| \leq |x - a|^2$$

und damit für den Differenzenquotienten

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right| = \frac{|f(x) - f(a)|}{|x - a|} \leq \frac{|x - a|^2}{|x - a|} = |x - a| \xrightarrow{x \rightarrow a} 0,$$

so daß sich für den Differentialquotienten

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0$$

ergibt.

- b) Wir weisen nach, daß für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ stets $f(a) = f(b)$ gilt; damit ist f eine konstante Funktion. Die Einschränkung $f|_{[a,b]} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist differenzierbar und erfüllt damit insbesondere die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung; damit gibt es ein $\xi \in]a, b[$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) \underset{\text{gemäß a)}}{=} 0, \quad \text{also} \quad f(a) = f(b).$$

4. Da die beiden Funktionen $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar sind, ist auch ihre Differenz

$$h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = g(x) - f(x),$$

stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar, und wegen $f(a) < g(a)$ sowie $f'(x) \leq g'(x)$ für alle $x \in]a, b[$ gilt

$$h(a) = g(a) - f(a) > 0$$

sowie

$$h'(x) = g'(x) - f'(x) \geq 0$$

für alle $x \in]a, b[$. Da $f(a) < g(a)$ bereits nach Voraussetzung gilt, sei $x \in]a, b[$; wir wenden den Mittelwertsatz der Differentialrechnung für die Funktion h auf dem Intervall $[a, x]$ an und erhalten ein $\xi \in]a, x[$ mit

$$h(x) - h(a) = \underbrace{h'(\xi)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{(x - a)}_{> 0} \geq 0, \quad \text{also} \quad h(x) \geq h(a) > 0$$

und damit $f(x) < g(x)$.