MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2014
Klausur
25.09.2014

Klausur zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“ — Lösungsvorschlag —

1. Es ist die Ungleichung

$$e^x > 1 + x \qquad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

zu beweisen:

- Die Funktion
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x - (1 + x)\,,$$
ist (als Differenz der Exponentialfunktion und einer linearen Funktion) stetig und differenzierbar mit $f'(x) = e^x - 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$; damit gilt:
  - für alle $x \in \,]-\infty, 0[$ ist $e^x < 1$, also $f'(x) < 0$, so daß die stetige Funktion f auf $]-\infty, 0]$ streng monoton fällt, es ist also $f(x) > f(0)$ für alle $x < 0$;
  - für alle $x \in \,]0, +\infty[$ ist $e^x > 1$, also $f'(x) > 0$, so daß die stetige Funktion f auf $[0, +\infty[$ streng monoton wächst, es ist also $f(x) > f(0)$ für alle $x > 0$.

  Für alle $x \neq 0$ gilt demnach
$$e^x - (1 + x) = f(x) > f(0) = e^0 - (0 + 1) = 1 - 1 = 0$$
und folglich $e^x > 1 + x$.
- Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar, genügt also insbesondere auf jedem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ den Voraussetzungen des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung:
  - für $x > 0$ gibt es also ein $\xi \in \,]0, x[$ mit
$$\exp(x) - \exp(0) = \exp'(\xi) \cdot (x - 0)\,, \quad \text{also} \quad e^x - 1 = e^\xi \cdot x,$$
und wegen $\xi > 0$ ist $e^\xi > 1$, woraus wegen $x > 0$ nach dem Monotoniegesetz der Multiplikation $e^\xi \cdot x > 1 \cdot x$ folgt;
  - für $x < 0$ gibt es also ein $\xi \in \,]x, 0[$ mit
$$\exp(x) - \exp(0) = \exp'(\xi) \cdot (x - 0)\,, \quad \text{also} \quad e^x - 1 = e^\xi \cdot x,$$
und wegen $\xi < 0$ ist $e^\xi < 1$, woraus wegen $x < 0$ nach dem Inversionsgesetz $e^\xi \cdot x > 1 \cdot x$ folgt.

Für alle $x \neq 0$ gilt demnach

$$e^x - 1 = e^\xi \cdot x > 1 \cdot x = x$$

und folglich $e^x > 1 + x$.

- Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist beliebig oft differenzierbar mit $\exp^{(n)} = \exp$ und damit $\exp^{(n)}(0) = \exp(0) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$; für das erste Taylorpolynom T_1 von exp mit dem Entwicklungspunkt $a = 0$ ergibt sich also

$$T_1(x) = \exp(0) + \exp'(0) \cdot x = 1 + x \qquad \text{für alle} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Nach der Taylorformel gilt $\exp(x) = T_1(x) + R_2(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, wobei es zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gemäß der Lagrangeschen Darstellung des Restgliedes ein ξ zwischen dem Entwicklungspunkt $a = 0$ und x mit

$$R_2(x) = \frac{\exp''(\xi)}{2!} \cdot x^2 = \frac{e^\xi}{2} \cdot x^2$$

gibt; für $x \neq 0$ ist $x^2 > 0$, und wir erhalten

$$e^x = \exp(x) = T_1(x) + R_2(x) = (1 + x) + \underbrace{\frac{e^\xi}{2}}_{>0} \cdot \underbrace{x^2}_{>0} > 1 + x.$$

2. a) Für eine stetige Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ auf dem nichtleeren Intervall $D \subseteq \mathbb{R}$ treffen wir die folgenden Definitionen:

   - $F : D \to \mathbb{R}$ heißt eine Integralfunktion von f, wenn

   $$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad \text{für alle} \qquad x \in D$$

   für eine fest gewählte untere Integrationsgrenze $a \in D$ gilt.
   - $F : D \to \mathbb{R}$ heißt eine Stammfunktion von f, wenn F differenzierbar mit $F' = f$, also $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in D$, ist.

   b) Für eine stetige Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ auf dem nichtleeren Intervall $D \subseteq \mathbb{R}$ besteht zwischen den beiden Begriffen „Integralfunktion von f“ und „Stammfunktion von f“ der folgende Zusammenhang:

   - Nach dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung ist jede Integralfunktion $F : D \to \mathbb{R}$ von f differenzierbar mit $F' = f$, also eine Stammfunktion von f.
   - Jede Integralfunktion $F : D \to \mathbb{R}$ von f besitzt gemäß

   $$F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$$

   die fest gewählte untere Integrationsgrenze $a \in D$ als Nullstelle; damit ist etwa $F = \exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wegen $F' = \exp' = \exp$ zwar eine Stammfunktion von $f = \exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wegen $F(x) = e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ aber keine Integralfunktion von f.

c) Die Integrandenfunktion

$$\gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad \gamma(x) = e^x \cdot \ln x,$$

ist (als Produkt der Exponentialfunktion und des Logarithmus) stetig; damit ist nach dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung ihre Integralfunktion

$$g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_1^x \gamma(t)\, dt = \int_1^x e^t \ln t\, dt,$$

differenzierbar mit $g'(x) = \gamma(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$. Ferner ist γ sogar differenzierbar, und für alle $x > 0$ gilt

$$g''(x) = \gamma'(x) = e^x \cdot \ln x + e^x \cdot \frac{1}{x};$$

wegen

$$g'(1) = \gamma(1) = e^1 \cdot \ln 1 = e \cdot 0 = 0$$

und

$$g''(1) = \gamma'(1) = e^1 \cdot \ln 1 + e^1 \cdot \frac{1}{1} = e \cdot 0 + e \cdot 1 = e > 0$$

besitzt g in $x = 1$ ein isoliertes lokales Minimum.

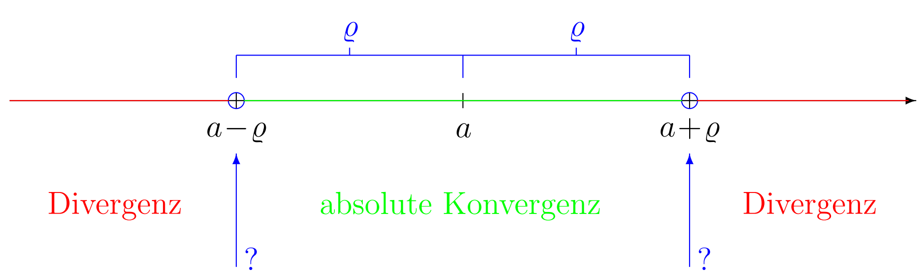
3. a) Besitzt die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x-a)^n$$

mit dem Entwicklungspunkt $a \in \mathbb{R}$ und der Koeffizientenfolge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ den Konvergenzradius $\varrho \in \mathbb{R}^+$, so ist sie

- für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-a| < \varrho$, also auf $]a-\varrho, a+\varrho[$, absolut konvergent,
- für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-a| > \varrho$, also auf $]-\infty, a-\varrho[\cup]a+\varrho, +\infty[$, divergent;

für die beiden verbleibenden Punkte $x = a \pm \varrho$ ist keine allgemeingültige Aussage möglich:



b) Gegeben ist nun die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot (n+1) \cdot (x-2)^n$$

mit dem Entwicklungspunkt $a = 2$ und den Koeffizienten $c_n = (-1)^n \cdot (n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

- Wegen

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}\cdot(n+2)}{(-1)^n\cdot(n+1)}\right| = \frac{n+2}{n+1} = \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1+0}{1+0} = 1 = c$$

besitzt die Potenzreihe den Konvergenzradius $\varrho = \frac{1}{c} = 1$; damit ist sie
 - für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-2| < 1$, also auf $]1,3[$, absolut konvergent,
 - für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-2| > 1$, also auf $]-\infty,1[\cup]3,+\infty[$, divergent.

Für $|x-2| = 1$, also für $x \in \{1,3\}$, gilt

$$|c_n\cdot(x-2)^n| = \underbrace{|c_n|}_{=n+1}\cdot\underbrace{|x-2|^n}_{=1^n} = n+1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty;$$

damit ist die Folge der Reihenglieder keine Nullfolge und folglich die Reihe divergent. Somit ergibt sich für die gegebene Potenzreihe insgesamt das Konvergenzintervall $D =]1,3[$.

- Die von der gegebenen Potenzreihe auf ihrem offenen Konvergenzintervall $D \subseteq \mathbb{R}$ definierte Funktion

$$f:]1,3[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(n+1)\cdot(x-2)^n,$$

ist nach dem Hauptsatz über Potenzreihen stetig und darf gliedweise integriert werden, so daß $F:]1,3[\to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(n+1)\cdot\frac{(x-2)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(x-2)^{n+1} \\ &= (x-2)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(x-2)^n = (x-2)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(2-x)^n \\ &\underset{|2-x|<1}{\overset{(*)}{=}} (x-2)\cdot\frac{1}{1-(2-x)} = \frac{x-2}{x-1} \end{aligned}$$

eine Stammfunktion von f ist; dabei geht bei $(*)$ die Summenformel für geometrische Reihen ein. Damit erhält man

$$f(x) = F'(x) = \frac{1\cdot(x-1)-(x-2)\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2}$$

für alle $x \in]1,3[$.

4. a) Zu betrachten ist die Kurve

$$f: [0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad f(t) = \left(\cos t + t\cdot\sin t,\ \sin t - t\cdot\cos t,\ \tfrac{1}{\sqrt{3}}\,t^3\right),$$

mit den drei Koordinatenfunktionen

$$\begin{aligned} f_1 &: [0,1] \to \mathbb{R}, & f_1(t) &= \cos t + t\cdot\sin t, \\ f_2 &: [0,1] \to \mathbb{R}, & f_2(t) &= \sin t - t\cdot\cos t, \\ f_3 &: [0,1] \to \mathbb{R}, & f_3(t) &= \tfrac{1}{\sqrt{3}}\,t^3. \end{aligned}$$

- Die drei Koordinatenfunktionen f_1, f_2 und f_3 von f sind (als Summen und Produkte von trigonometrischen Funktionen und Polynomfunktionen) stetig differenzierbar, und für alle $t \in [0,1]$ gilt

$$\begin{aligned} f_1'(t) &= -\sin t + (1 \cdot \sin t + t \cdot \cos t) = t \cdot \cos t, \\ f_2'(t) &= \cos t - (1 \cdot \cos t + t \cdot (-\sin t)) = t \cdot \sin t, \\ f_3'(t) &= \tfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot 3\,t^2 = \sqrt{3}\,t^2, \end{aligned}$$

womit sich der Tangentialvektor

$$f'(t) = \left(t \cdot \cos t,\ t \cdot \sin t,\ \sqrt{3}\,t^2\right)$$

mit

$$\begin{aligned} \|f'(t)\|^2 &= (t \cdot \cos t)^2 + (t \cdot \sin t)^2 + (\sqrt{3}\,t^2)^2 \\ &= t^2 \cdot \cos^2 t + t^2 \sin^2 t + 3\,t^4 \\ &= t^2 \cdot \underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_{=1} + 3\,t^4 \ = \ t^2 + 3\,t^4 \ = \ t^2 \cdot (1 + 3\,t^2) \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \|f'(t)\| &= \sqrt{t^2 \cdot (1 + 3\,t^2)} = \sqrt{t^2} \cdot \sqrt{1 + 3\,t^2} \\ &= \underbrace{|t|}_{=t \geq 0} \cdot \sqrt{1 + 3\,t^2} = t \cdot \sqrt{1 + 3\,t^2} \end{aligned}$$

ergibt.

- Die Kurve f ist stetig differenzierbar, mithin rektifizierbar, und für ihre Bogenlänge gilt

$$L = \int_0^1 \|f'(t)\|\,dt = \int_0^1 t \cdot \sqrt{1 + 3\,t^2}\,dt.$$

Unter Verwendung der Substitution

$$x = g(t) = 1 + 3\,t^2 \quad \text{mit} \quad \frac{dx}{dt} = g'(t) = 6\,t \quad \text{bzw.} \quad 6\,t\,dt = dx$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 t \cdot \sqrt{1 + 3\,t^2}\,dt = \frac{1}{6} \cdot \int_0^1 \sqrt{1 + 3\,t^2} \cdot 6\,t\,dt \\ &= \frac{1}{6} \cdot \int_0^1 \sqrt{g(t)} \cdot g'(t)\,dt = \frac{1}{6} \cdot \int_{g(0)}^{g(1)} \sqrt{x}\,dx \\ &= \frac{1}{6} \cdot \int_1^4 x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{6} \cdot \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{1}{9} \cdot \left[x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 \\ &= \frac{1}{9} \cdot \left[4^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{1}{9} \cdot [8 - 1] = \frac{7}{9}. \end{aligned}$$

b) Die drei Koordinatenfunktionen der gegebenen Kurve

$$K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad K(t) = \left(e^t,\ e^{-t},\ e^t\right),$$

sind (als Exponentialfunktionen zur Basis e bzw. $\frac{1}{e}$) differenzierbar; damit ist die Kurve K differenzierbar mit

$$K'(t) = \left(e^t,\ -e^{-t},\ e^t\right) \quad \text{für alle} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Für jeden Parameterwert ist der Tangentialvektor $K'(t)$ wegen $e^t \neq 0$ (oder auch $-e^{-t} \neq 0$) vom Nullvektor verschieden, so daß dort auch die Tangente $K(t) + \mathbb{R} \cdot K'(t)$ erklärt ist; speziell für $t = 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned} K(0) + \mathbb{R} \cdot K'(0) &= \left(e^0,\ e^{-0},\ e^0\right) + \mathbb{R} \cdot \left(e^0,\ -e^{-0},\ e^0\right) \\ &= (1,\ 1,\ 1) + \mathbb{R} \cdot (1,\ -1,\ 1). \end{aligned}$$