MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2014
Klausur
23.07.2014

Klausur zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“ — Lösungsvorschlag —

1. a) Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung lautet: ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige und auf $]a,b[$ differenzierbare Funktion, so gibt es ein $\xi \in\,]a,b[$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad \text{bzw.} \quad f(b)-f(a) = f'(\xi)\cdot(b-a).$$

Für ein $x \in\,]0,1]$ betrachten wir nun die Einschränkung

$$f = \exp|_{[0,x]} : [0,x] \to \mathbb{R}$$

der Exponentialfunktion auf das abgeschlossene Intervall $[0,x] \subseteq \mathbb{R}$; diese ist differenzierbar und erfüllt damit insbesondere die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, nämlich Stetigkeit auf $[0,x]$ und Differenzierbarkeit auf $]0,x[$. Damit existiert ein $\xi \in\,]0,x[$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \qquad \text{also} \qquad e^{\xi} = \frac{e^x - e^0}{x-0};$$

wegen $\xi \in\,]0,1[$ und dem Monotonieverhalten von exp ist $1 < e^{\xi} < e$, also

$$1 < \frac{e^x - e^0}{x-0} < e \underset{x>0}{\iff} x < e^x - 1 < e\cdot x \iff 1 + x < e^x < 1 + e\cdot x.$$

b) Wir betrachten für $r > 1$ das uneigentliche Integral

$$\int_e^{\infty} \frac{1}{x\cdot(\ln x)^r}\,dx$$

und bestimmen zunächst eine Stammfunktion; mit der Substitution

$$t = \ln x \quad \text{mit} \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \quad \text{bzw.} \quad dt = \frac{1}{x}\,dx$$

erhalten wir

$$\int \frac{1}{x\cdot(\ln x)^r}\,dx = \int \frac{1}{t^r}\,dt = \int t^{-r}\,dt = \frac{t^{-r+1}}{-r+1} + C = \frac{(\ln x)^{-r+1}}{-r+1} + C.$$

Für $b > e$ ergibt sich damit

$$\int_e^b \frac{1}{x \cdot (\ln x)^r}\,dx = \left[\frac{(\ln x)^{-r+1}}{-r+1}\right]_e^b = \frac{(\ln b)^{-r+1}}{-r+1} - \frac{(\ln e)^{-r+1}}{-r+1} =$$
$$= \frac{(\ln b)^{-r+1}}{-r+1} - \frac{1}{-r+1} = \frac{1}{(-r+1)\cdot(\ln b)^{r-1}} - \frac{1}{-r+1},$$

und wegen $r > 1$ ist $r - 1 > 0$ und damit

$$\lim_{b\to\infty}\left(\underbrace{\frac{1}{(-r+1)\cdot\underbrace{(\ln b)^{r-1}}_{\to\infty}}}_{\to 0} - \frac{1}{-r+1}\right) = \frac{1}{r-1}.$$

Folglich konvergiert das uneigentliche Integral, und sein Wert ist $\dfrac{1}{r-1}$.

2. a) Für die $(n+1)$–mal stetig differenzierbare Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall $D \subseteq \mathbb{R}$ ist

$$T_n : D \to \mathbb{R}, \quad T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k =$$
$$= f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot(x-a)^n,$$

das n–te Taylorpolynom von f zum Entwicklungspunkt $a \in D$; gemäß der Lagrangeschen Darstellung des Restglieds gibt ein ξ zwischen a und x mit

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x-a)^{n+1}.$$

b) Die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = (x+\pi)\cdot\sin x,$$

ist als Produkt einer linearen Funktion und des Sinus beliebig oft differenzierbar, und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 1\cdot\sin x + (x+\pi)\cdot\cos x \\
&= \sin x + (x+\pi)\cdot\cos x, \\
f''(x) &= \cos x + (1\cdot\cos x + (x+\pi)\cdot(-\sin x)) \\
&= 2\,\cos x - (x+\pi)\cdot\sin x, \\
f'''(x) &= -2\,\sin x - (1\cdot\sin x + (x+\pi)\cdot\cos x) \\
&= -3\,\sin x - (x+\pi)\cdot\cos x.
\end{aligned}$$

- Im Entwicklungspunkt $a = \pi$ ist

$$f(\pi) = 0, \quad f'(\pi) = -2\,\pi \quad \text{und} \quad f''(\pi) = -2,$$

und für das Taylorpolynom T_2 von f ergibt sich damit

$$\begin{aligned} T_2(x) &= f(\pi) + f'(\pi) \cdot (x-\pi) + \frac{1}{2} f''(\pi) \cdot (x-\pi)^2 \\ &= 0 + (-2\,\pi) \cdot (x-\pi) + \frac{1}{2} \cdot (-2) \cdot (x-\pi)^2 \\ &= -x^2 + \pi^2 \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

- Nach der Taylorformel gilt $f(x) = T_2(x) + R_3(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, wobei es zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gemäß der Lagrangeschen Darstellung des Restgliedes ein ξ zwischen dem Entwicklungspunkt $a = \pi$ und x mit

$$R_3(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!} (x-\pi)^3$$

gibt; da $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ gilt auch $\xi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ und wir erhalten

$$\begin{aligned} |f'''(\xi)| &= |-3\,\sin\xi - (\xi+\pi) \cdot \cos\xi| \\ &\leq |-3\,\sin\xi| + |(\xi+\pi) \cdot \cos\xi| = 3 \cdot \underbrace{|\sin\xi|}_{\leq 1} + |\xi+\pi| \cdot \underbrace{|\cos\xi|}_{\leq 1} \\ &\leq 3 \cdot 1 + (\xi+\pi) \cdot 1 = \underbrace{3}_{\leq\pi} + \underbrace{\xi}_{\leq 2\pi} + \pi \leq \pi + 2\,\pi + \pi \leq 6\,\pi \end{aligned}$$

und folglich die Abschätzung

$$\begin{aligned} |f(x) - T_2(x)| = |R_3(x)| = \left| \frac{f'''(\xi)}{3!} (x-\pi)^3 \right| &= \\ = \frac{1}{6} \cdot \underbrace{|f'''(\xi)|}_{\leq 6\,\pi} \cdot \underbrace{|x-\pi|^3}_{\leq (\frac{\pi}{2})^3} \leq \frac{1}{6} \cdot 6\,\pi \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 &= \frac{\pi^4}{8}. \end{aligned}$$

3. a) Die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)^n$ besitzt den Entwicklungspunkt $a = \frac{1}{2}$ und die Koeffizienten $c_n = \dfrac{2^n}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen

$$\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \left| \frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}} \right| = 2 \cdot \frac{n}{n+1} = 2 \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2 = c$$

ergibt sich für den Konvergenzradius $\varrho = \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$; damit ist die Potenzreihe konvergent für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$, also für alle $x \in\,]0,1[$, und divergent für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}$, also für alle $x \in\,]-\infty, 0[\, \cup\,]1, \infty[$.

Für $x = 1$ ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

als harmonische Reihe divergent, und für $x = 0$ ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

als alternierende harmonische Reihe konvergent. Insgesamt ergibt sich das Konvergenzintervall $D = [0, 1[$.

b) Nach dem Hauptsatz über Potenzreihen ist f zumindest auf dem offenen Intervall $]0, 1[$ differenzierbar, und für alle $x \in\,]0, 1[$ gilt

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \cdot n \left(x - \frac{1}{2}\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)^{n-1} =$$

$$= 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(2 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)\right)^{n-1} = 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (2\,x - 1)^n\,,$$

und wegen $|2\,x - 1| < 1$ ergibt sich unter Verwendung der Summenformel für geometrische Reihen

$$f'(x) = 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (2\,x - 1)^n = 2 \cdot \frac{1}{1 - (2\,x - 1)} = \frac{2}{2 - 2\,x} = \frac{1}{1 - x}.$$

c) Es gibt eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, so daß

$$f(x) = -\ln|1 - x| + c \underset{1-x>0}{=} -\ln(1 - x) + c$$

für alle $x \in\,]0, 1[$ gilt, wobei sich speziell für den Entwicklungspunkt $a = \frac{1}{2}$ wegen

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^n = 0 \quad \text{und} \quad -\ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = -\ln\frac{1}{2} = \ln 2$$

dann $c = -\ln 2$ ergibt. Folglich ist

$$f(x) = -\ln(1 - x) - \ln 2 \qquad \text{für alle} \quad x \in\,]0, 1[\,;$$

da die Funktion f im Konvergenzpunkt 0 der gegebenen Potenzreihe nach dem abelschen Grenzwertsatz zumindest stetig ist, ergibt sich

$$f(0) = \lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} (-\ln(1 - x) - \ln 2) =$$

$$= -\ln(1 - 0) - \ln 2 = -\ln 2,$$

also

$$f(x) = -\ln(1 - x) - \ln 2 \qquad \text{für alle} \quad x \in [0, 1[\,.$$

4. a) Die Kurve

$$f : [-1,1] \to \mathbb{R}^2, \quad f(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2\,t}{1+t^2} \right),$$

ist stetig differenzierbar mit

$$\begin{aligned} f'(t) &= \left(\frac{(-2\,t)\cdot(1+t^2) - (1-t^2)\cdot(2\,t)}{(1+t^2)^2}, \ \frac{2\cdot(1+t^2) - (2\,t)\cdot(2\,t)}{(1+t^2)^2} \right) \\ &= \frac{1}{(1+t^2)^2} \cdot \left(-2\,t - 2\,t^3 - 2\,t + 2\,t^3, \ 2 + 2\,t^2 - 4\,t^2 \right) \\ &= \frac{1}{(1+t^2)^2} \cdot \left(-4\,t, \ 2 - 2\,t^2 \right) \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \|f'(t)\|^2 &= \frac{1}{(1+t^2)^4} \cdot \left((-4\,t)^2 + \left(2 - 2\,t^2\right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{(1+t^2)^4} \cdot \left(16\,t^2 + 4 - 8\,t^2 + 4\,t^4 \right) = \frac{1}{(1+t^2)^4} \cdot \left(2\,t^2 + 2 \right)^2, \end{aligned}$$

also

$$\|f'(t)\| = \sqrt{\frac{1}{(1+t^2)^4} \cdot (2\,t^2+2)^2} = \frac{2\cdot(1+t^2)}{(1+t^2)^2} = \frac{2}{1+t^2}$$

für alle $t \in [-1,1]$; folglich ist f rektifizierbar, und für die Bogenlänge L gilt

$$\begin{aligned} L &= \int_{-1}^{1} \|f'(t)\|\,dt = \int_{-1}^{1} \frac{2}{1+t^2}\,dt = 2 \cdot \Big[\arctan t \Big]_{-1}^{1} = \\ &= 2 \cdot (\arctan 1 - \arctan(-1)) = 2 \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) = \pi. \end{aligned}$$

b) Die erste Koordinatenfunktion

$$\varphi : [1,2] \to \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = 12\,t - t^3 - 11,$$

ist wegen $\varphi'(t) = 12 - 3\,t^2 > 0$ für alle $t \in \,]1,2[$ streng monoton wachsend mit dem Wertebereich $W_x = [\varphi(1), \varphi(2)] = [0,5]$; damit tritt aber jedes $x \in [0,5]$ für genau ein $t \in \mathbb{R}$ auf, nämlich für

$$x = \varphi(t) \iff t = \varphi^{-1}(x),$$

und das dazugehörige $y \in \mathbb{R}$ ist dann

$$y = \psi(t) = \psi\left(\varphi^{-1}(x)\right).$$

Folglich beschreibt die Kurve K den Graphen der Funktion

$$f : [0,5] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \psi\left(\varphi^{-1}(x)\right),$$

und es ist $f(\varphi(t)) = \psi(t)$ für alle $t \in [1,2]$. Die zweite Koordinatenfunktion

$$\psi : [1,2] \to \mathbb{R}, \quad \psi(t) = \frac{4}{t^2} - 1,$$

nimmt wegen $\psi(t) \geq 0$ für alle $t \in [1,2]$ nur nichtnegative Werte an; damit verläuft G_f komplett im 1. Quadranten und verbindet dabei den Punkt $K(1) = (0,3)$ der y–Achse mit dem Punkt $K(2) = (5,0)$ der x–Achse. Für den Inhalt A der Fläche, die von der Kurve und den Koordinatenachsen eingeschlossen wird, ergibt sich

$$\begin{aligned} A &= \int_0^5 f(x)\,dx = \int_{\varphi(1)}^{\varphi(2)} f(x)\,dx = \int_1^2 f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_1^2 \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt \\ &= \int_1^2 \left(\frac{4}{t^2} - 1\right) \cdot \left(12 - 3\,t^2\right)\,dt = \int_1^2 \left(\frac{48}{t^2} - 24 + 3\,t^2\right)\,dt \\ &= \left[-\frac{48}{t} - 24\,t + t^3\right]_1^2 = (-24 - 48 + 8) - (-48 - 24 + 1) = 7. \end{aligned}$$