

Klausur zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“

1. a) Man formuliere den Mittelwertsatz der Differentialrechnung und zeige damit

$$1 + x < e^x < 1 + e \cdot x \quad \text{für alle } x \in]0, 1]. \quad (3)$$

- b) Man zeige, daß für jedes $r \in]1, \infty[$ das uneigentliche Integral

$$\int_e^\infty \frac{1}{x \cdot (\ln x)^r} dx$$

konvergiert, und bestimme seinen Wert. (3)

2. a) Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine $(n + 1)$ -mal stetig differenzierbare Funktion auf dem Intervall $D \subseteq \mathbb{R}$ sowie $a \in D$. Man gebe das n -te Taylorpolynom T_n von f zum Entwicklungspunkt a sowie die Lagrangesche Darstellung des Restglieds R_{n+1} an. (1)

- b) Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = (x + \pi) \cdot \sin x.$$

- Man bestimme das zweite Taylorpolynom T_2 von f zum Entwicklungspunkt $a = \pi$. (2)
- Für alle $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ zeige man die Abschätzung

$$|f(x) - T_2(x)| \leq \frac{\pi^4}{8}. \quad (3)$$

3. a) Man bestimme das Konvergenzintervall D der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)^n ;$$

es bezeichne

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)^n ,$$

die von der Potenzreihe auf D definierte Funktion. (2)

- b) Man begründe, daß f im Innern von D differenzierbar ist, und stelle dort die erste Ableitung f' als Potenzreihe sowie als elementare Funktion dar. (2)
- c) Man begründe, daß f auf ganz D stetig ist, und stelle f als elementare Funktion dar. (2)

4. a) Für die Kurve

$$f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right),$$

zeige man $\|f'(t)\| = \frac{2}{1+t^2}$ und berechne die Bogenlänge von f . (3)

- b) Für die Kurve

$$K : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad K(t) = \left(12t - t^3 - 11, \frac{4}{t^2} - 1 \right),$$

berechne man den Inhalt der zwischen der Bildmenge von K und den beiden Koordinatenachsen eingeschlossenen Fläche. (3)