MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2014
Blatt 12
09.07.2014

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“ — Bearbeitungsvorschlag —

45. a) Der maximale Definitionsbereich D der Funktion

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \sqrt{\frac{y}{x^2} - 1} + 4,$$

besteht genau aus denjenigen Punkten $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, für die weder der auftretende Nenner verschwindet noch der Radikand negativ wird, also für

$$x \neq 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{y}{x^2} - 1 \geq 0 \iff \frac{y}{x^2} \geq 1 \iff y \geq x^2.$$

Da die Quadratwurzel ausschließlich nichtnegative Werte annimmt, gilt zunächst $W \subseteq [4;\infty[$. Zum Nachweis von „$\supseteq$“ betrachten wir sodann die Punkte $(t^2+1,\ (t^2+1)^3) \in D$ für $t \in \mathbb{R}$ mit

$$h(t) = f(t^2+1, (t^2+1)^3) = \sqrt{\frac{(t^2+1)^3}{(t^2+1)^2} - 1} + 4 = $$
$$= \sqrt{t^2+1-1} + 4 = \sqrt{t^2} + 4 = |t| + 4;$$

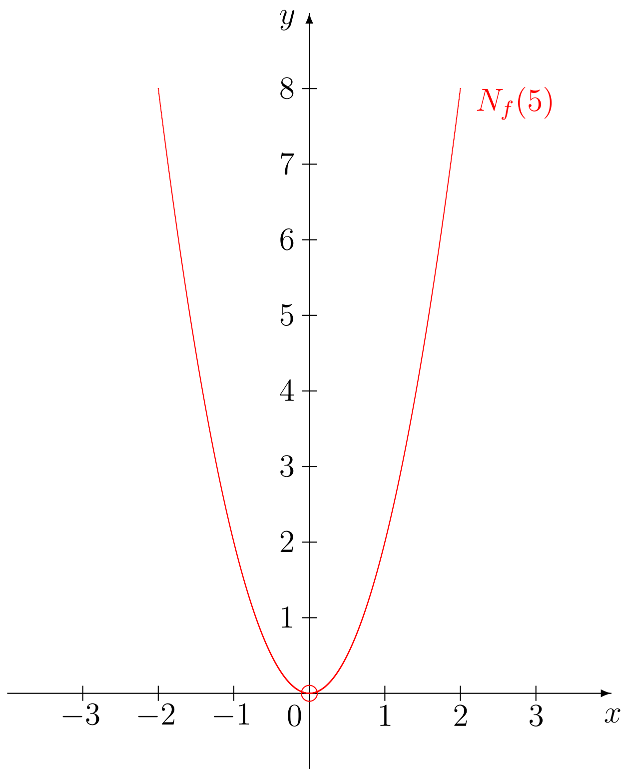
da h eine Betragsfunktion mit dem Achsenabschnitt 4 ist, gilt $W \supseteq [4;\infty[$, insgesamt also $W = [4;\infty[$.

b) Für den Punkt $(-2;4)$ gilt $f(-2;4) = 4 \leq f(x,y)$ für alle $(x,y) \in D$. Damit liegt in $(-2;4)$ ein globales Minimum vor.

c) Sei $c = 5$; für alle $(x,y) \in D$ gilt

$$(x,y) \in N_f(5) \iff f(x,y) = 5 \iff$$
$$\iff \sqrt{\frac{y}{x^2} - 1} + 4 = 5 \iff \sqrt{\frac{y}{x^2} - 1} = 1 \iff$$
$$\iff \frac{y}{x^2} - 1 = 1 \iff \frac{y}{x^2} = 2 \iff y = 2x^2$$

Damit ist $N_f(c)$ die an ihrem Scheitel $(0,0)$ punktierte Parabel mit der Gleichung $y = 2\,x^2$:



46. Zur Bestimmung der globalen Extremstellen der gegebenen Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = (x^2 + 10\,x\,y + y^2)\, e^{x^2+y^2}$$

auf der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe

$$K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

betrachten wir für den Punkt (x, y) von K die Polarkoordinaten $(r\,\cos\varphi; r\,\sin\varphi)$ mit $r \in [0; 1]$ und $\varphi \in [0; 2\pi]$; dabei gilt

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(r\,\cos\varphi,\ r\,\sin\varphi) = \\ &= \left((r\,\cos\varphi)^2 + 10 \cdot r\,\cos\varphi \cdot r\,\sin\varphi + (r\,\sin\varphi)^2\right) \cdot e^{(r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2} = \\ &= r^2\,\left(\cos^2\varphi + 10\,\sin\varphi\,\cos\varphi + \sin^2\varphi\right) \cdot e^{r^2\,(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)} \underset{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1}{=} \\ &= r^2\,(1 + 10\,\sin\varphi\,\cos\varphi)\,e^{r^2} \underset{2\,\sin\varphi\,\cos\varphi=\sin(2\,\varphi)}{=} \left(r^2\,e^{r^2}\right)(1 + 5\,\sin(2\,\varphi))\,. \end{aligned}$$

Wegen $0 \leq r \leq 1$ gilt

$$0 \leq r^2\,e^{r^2} \leq 1 \cdot e^1 = e,$$

und wegen $-1 \leq \sin(2\,\varphi) \leq 1$ gilt

$$-4 \leq 1 + 5\,\sin(2\,\varphi) \leq 6,$$

woraus sich insgesamt

$$-4\,e \leq f(x, y) \leq 6\,e$$

ergibt; wegen

$$f(x,y) = -4\,e \iff r^2\,e^{r^2} = e \text{ und } 1 + 5\,\sin(2\,\varphi) = -4 \iff$$
$$\iff r = 1 \text{ und } 2\,\varphi \in \left\{\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right\} \iff r = 1 \text{ und } \varphi \in \left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$$

sind $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ und $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ die globalen Minimalstellen von f, und wegen

$$f(x,y) = 6\,e \iff r^2\,e^{r^2} = e \text{ und } 1 + 5\,\sin(2\,\varphi) = 6 \iff$$
$$\iff r = 1 \text{ und } 2\,\varphi \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right\} \iff r = 1 \text{ und } \varphi \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$$

sind $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ und $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ die globalen Maximalstellen von f.

47. Zu betrachten ist die Menge

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2\pi \;\text{ und }\; \cos x \leq y \leq \sin x\right\};$$

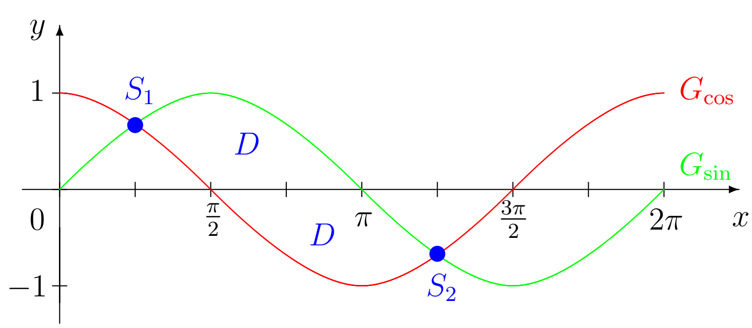
wegen

$$\cos x = \sin x \iff 1 = \tan x \iff x \in \left\{\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{5\pi}{4}\right\}$$

für alle $x \in [0; 2\,\pi]$ besitzen die beiden Graphen $G_{\cos}$ und $G_{\sin}$ in diesem Bereich genau die beiden Schnittpunkte $S_1 = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ und $S_2 = \left(\frac{5\pi}{4}; -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$, und wegen

$$\cos x \leq \sin x \iff x \in \left[\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{5\pi}{4}\right]$$

ist $D \subseteq \mathbb{R}^2$ genau der abgeschlossene Bereich, der von den Graphen $G_{\cos}$ und $G_{\sin}$ zwischen ihren Schnittpunkten S_1 und S_2 begrenzt wird:



Für alle $(x, y) \in D$ gilt

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= (y-\sin x)\,(y-\cos x) \\
&= y^2 - (\sin x + \cos x)\,y + \sin x\,\cos x \\
&= \left(y^2 - 2\cdot\frac{\sin x+\cos x}{2}\cdot y + \left(\frac{\sin x+\cos x}{2}\right)^2\right) + \\
&\qquad\qquad + \sin x\,\cos x - \left(\frac{\sin x+\cos x}{2}\right)^2 \\
&= \left(y - \frac{\sin x+\cos x}{2}\right)^2 + \sin x\,\cos x - \frac{\sin^2 x + 2\,\sin x\,\cos x + \cos^2 x}{4} \\
&= \left(y - \frac{\sin x+\cos x}{2}\right)^2 + \frac{2\,\sin x\,\cos x}{4} - \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{4} \\
&= \underbrace{\left(y - \frac{\sin x+\cos x}{2}\right)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{\sin(2x)}{4}}_{\geq -\frac{1}{4}} - \frac{1}{4} \;\geq\; 0 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

mit

$$f\left(\tfrac{3}{4}\pi, 0\right) = \Big(0 - \underbrace{\sin\tfrac{3}{4}\pi}_{=\frac{1}{2}\sqrt{2}}\Big)\Big(0 - \underbrace{\cos\tfrac{3}{4}\pi}_{=-\frac{1}{2}\sqrt{2}}\Big) = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{2} = -\tfrac{1}{2},$$

also

$$f(x,y) \geq -\tfrac{1}{2} = f\left(\tfrac{3}{4}\pi, 0\right),$$

so daß $\left(\frac{3}{4}\pi, 0\right)$ eine globale Minimalstelle der Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist.

48. Die zu betrachtende Menge

$$\left\{x^3 + y^3 \mid x,\, y \in [0;\infty[\;\text{ und }\; x^2 + y^2 = 1\right\}$$

ist der Wertebereich der Funktion

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^3 + y^3,$$

wobei der Definitionsbereich

$$D = \left\{(x,y) \in [0;\infty[\times [0;\infty[\mid x^2 + y^2 = 1\right\}$$

der im abgeschlossenen 1. Quadranten liegende Viertelkreisbogen des Einheitskreises ist. Für einen Punkt (x, y) von D betrachten wir seine Polardarstellung $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ mit $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; damit ist

$$f(x,y) = f(\cos\varphi, \sin\varphi) = \cos^3\varphi + \sin^3\varphi,$$

wir haben also den Wertebereich der Hilfsfunktion

$$h : \left[0; \tfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, \quad h(\varphi) = \cos^3\varphi + \sin^3\varphi,$$

zu bestimmen. Nach dem Satz von Weierstraß nimmt die stetige Funktion h auf dem abgeschlossenen Intervall $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ein globales Minimum p und ein globales Maximum q an, und es gilt $W_h = [h(p); h(q)]$; hierfür kommen nur die beiden Randpunkte 0 und $\frac{\pi}{2}$ sowie die Nullstellen der Ableitung h' in $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ in Frage, wegen

$$h'(\varphi) = 3\,\cos^2\varphi \cdot (-\sin\varphi) + 3\,\sin^2\varphi \cdot \cos\varphi = 3\,\sin\varphi\,\cos\varphi\,(-\cos\varphi + \sin\varphi)$$

für alle $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ist dies nur $\frac{\pi}{4}$. Der Wertevergleich

$$h(0) = h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \qquad \text{sowie} \qquad h\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

zeigt, daß $p = \frac{\pi}{4}$ und $q \in \left\{0; \frac{\pi}{2}\right\}$ mit $W_h = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right]$ ist.