MATHEMATISCHES INSTITUT DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN Dr. E. Schörner	SS 2014 Blatt 10 25.06.2014

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“ — Bearbeitungsvorschlag —

37. Wir bestimmen zunächst die Schnittpunkte der gegebenen Kurve

$$f : [0,\infty[\to \mathbb{R}^2, \quad f(t) = (x(t),\ y(t)) = \left(\tfrac{t^6}{6},\ 2 - \tfrac{t^4}{4}\right).$$

mit den beiden Koordinatenachsen:

- Für den Schnittpunkt S_y mit der y–Achse gilt

$$x(t) = 0 \iff \frac{t^6}{6} = 0 \iff t^6 = 0 \iff t = 0;$$

damit ergibt sich $y(0) = 2$ und folglich $S_y = (0; 2)$.

- Für den Schnittpunkt S_x mit der x–Achse gilt

$$y(t) = 0 \iff 2 - \frac{t^4}{4} = 0 \iff t^4 = 8 \iff t = \sqrt[4]{8};$$

damit ergibt sich $x(\sqrt[4]{8}) = \frac{1}{6}\left(\sqrt[4]{8}\right)^6 = \frac{1}{6}\sqrt{2}^{\,9}$ und folglich $S_x = \left(\frac{1}{6}\sqrt{2}^{\,9}; 0\right)$.

Des weiteren ist die Kurve f stetig differenzierbar mit

$$f'(t) = \left(t^5,\ -t^3\right)$$

und damit

$$\|f'(t)\| = \sqrt{\left(t^5\right)^2 + \left(-t^3\right)^2} = \sqrt{t^{10} + t^6} = \sqrt{t^6\left(t^4+1\right)} = \\ = \sqrt{t^6} \cdot \sqrt{t^4+1} = \left|t^3\right| \cdot \sqrt{t^4+1} \underset{t \geq 0}{=} t^3 \cdot \sqrt{t^4+1}$$

für alle $t \in [0,\infty[$; insbesondere ist die Kurve f auf dem Intervall $\left[0; \sqrt[4]{8}\right]$ rektifizierbar, und unter Verwendung der Substitution

$$u = g(t) = t^4 + 1 \quad \text{mit} \quad \frac{du}{dt} = 4\,t^3, \quad \text{also} \quad du = 4\,t^3\,dt,$$

ergibt sich für ihre Bogenlänge zwischen den Schnittpunkten mit den beiden Koordinatenachsen dann

$$L = \int_0^{\sqrt[4]{8}} \|f'(t)\|\,dt = \int_0^{\sqrt[4]{8}} t^3 \cdot \sqrt{t^4+1}\,dt = \frac{1}{4}\int_0^{\sqrt[4]{8}} \sqrt{t^4+1} \cdot 4\,t^3\,dt = \\ = \frac{1}{4}\int_{g(0)}^{g(\sqrt[4]{8})} \sqrt{u}\,du = \frac{1}{4}\int_1^9 u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{4}\left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^9 = \frac{9^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}}{6} = \frac{27-1}{6} = \frac{13}{3}.$$

38. a) Die Funktion

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right),$$

ist (als Summe und Verkettung differenzierbarer Funktionen) selbst differenzierbar; für die Ableitung des ersten Summanden

$$F_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F_1(x) = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{1+x^2}$$

verwenden wir die Produktregel und (für die Ableitung des zweiten Faktors) die Kettenregel und erhalten

$$F_1'(x) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1+x^2} + \frac{x}{2} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2\,x\right) = \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{2\sqrt{1+x^2}}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$; für die Ableitung des zweiten Summanden

$$F_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F_2(x) = \frac{1}{2}\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

verwenden wir dann (zweimal) die Kettenregel und erhalten

$$\begin{aligned} F_2'(x) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot (2\,x)\right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Insgesamt erhalten wir also

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left(\frac{1}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{2\sqrt{1+x^2}}\right) + \left(\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{x^2+1}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{\sqrt{1+x^2}^{\,2}}{2\sqrt{1+x^2}} = \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+x^2} = f(x) \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$; damit ist F eine Stammfunktion der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{1+x^2}.$$

b) Die gegebene Kurve

$$\gamma : [0; 6\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = t \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \cdot \cos t \\ t \cdot \sin t \end{pmatrix},$$

besitzt die beiden stetig differenzierbaren Koordinatenfunktionen

$$\gamma_1 : [0; 6\pi] \to \mathbb{R}, \quad \gamma_1(t) = t \cdot \cos t,$$

mit

$$\gamma_1'(t) = 1 \cdot \cos t + t \cdot (-\sin t) = \cos t - t\,\sin t$$

für alle $t \in [0; 6\pi]$ und

$$\gamma_2 : [0; 6\pi] \to \mathbb{R}, \quad \gamma_2(t) = t \cdot \sin t,$$

mit

$$\gamma_2'(t) = 1 \cdot \sin t + t \cdot \cos t = \sin t + t\,\cos t$$

für alle $t \in [0; 6\pi]$; folglich ist γ eine stetig differenzierbare Kurve, und für alle $t \in [0; 6\pi]$ gilt

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t - t\,\sin t \\ \sin t + t\,\cos t \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} \|\gamma'(t)\|^2 &= \gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2 = (\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 = \\ &= \left(\cos^2 t - 2\cos t \cdot t\sin t + t^2\sin^2 t\right) + \left(\sin^2 t + 2\sin t \cdot t\cos t + t^2\cos^2 t\right) = \\ &= \underbrace{\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)}_{=1} + t^2\underbrace{\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)}_{=1} = 1 + t^2 \end{aligned}$$

und damit

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1+t^2} = f(t).$$

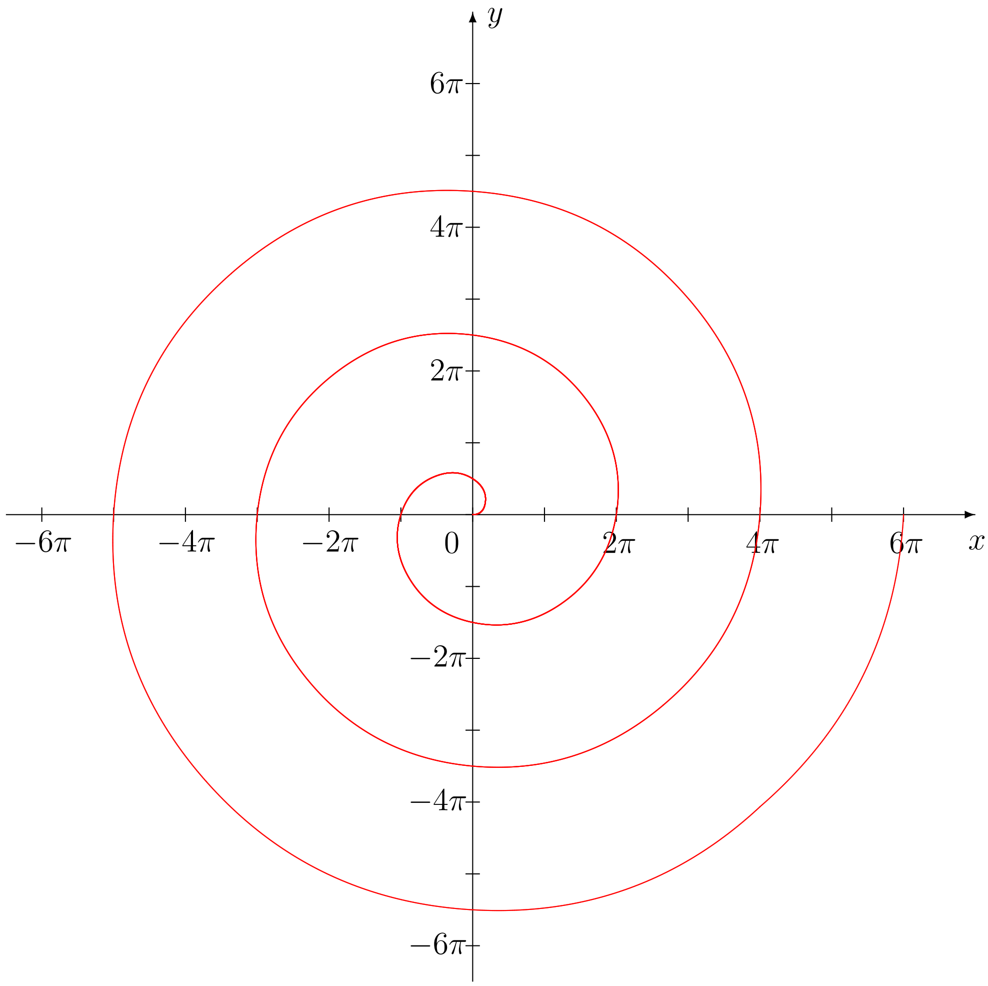
Die stetig differenzierbare Kurve γ ist insbesondere rektifizierbar, und für ihre Bogenlänge L gilt

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{6\pi} \|\gamma'(t)\|\,dt = \int_0^{6\pi} f(t)\,dt = [F(t)]_0^{6\pi} = F(6\pi) - F(0) = \\ &= \left(\frac{6\pi}{2}\sqrt{1+(6\pi)^2} + \frac{1}{2}\ln\left(6\pi + \sqrt{1+(6\pi)^2}\right)\right) - \\ &\quad - \left(\frac{0}{2}\sqrt{1+0^2} + \frac{1}{2}\ln\left(0 + \sqrt{1+0^2}\right)\right) = \\ &= 3\pi\sqrt{1+36\pi^2} + \frac{1}{2}\ln\left(6\pi + \sqrt{1+36\pi^2}\right). \end{aligned}$$

c) Für die Skizze der Bildmenge

$$\gamma\left([0; 6\pi]\right) = \{\gamma(t) \mid 0 \le t \le 6\pi\}$$

kann man zunächst für einige Werte von t, etwa den Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$, den Kurvenpunkt $\gamma(t)$ und den Tangentialvektor $\gamma'(t)$ berechnen und in das Koordinatensystem eintragen, um dann die entstehende Spirale zu zeichnen:



39. a) Die Kurve $K : [0; 2\,\pi] \to \mathbb{R}^2,\ K(t) = (\varphi(t),\ \psi(t)),$ mit

$$\varphi(t) = t - \sin t \qquad \text{und} \qquad \psi(t) = 1 - \cos t$$

ist stetig differenzierbar mit

$$\varphi'(t) = 1 - \cos t \qquad \text{und} \qquad \psi'(t) = \sin t$$

und damit

$$\begin{aligned} \|K'(t)\| &= \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} = \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t} = \\ &= \sqrt{1 - 2\,\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} \underset{\cos^2 t + \sin^2 t = 1}{=} \sqrt{2\,(1-\cos t)} = \\ &\underset{1-\cos t = 2\,\sin^2 \frac{t}{2}}{=} \sqrt{4\,\sin^2 \frac{t}{2}} = 2\,\left|\sin \frac{t}{2}\right| \underset{0 \le \frac{t}{2} \le \pi}{=} 2\,\sin \frac{t}{2} \end{aligned}$$

für alle $t \in [0; 2\,\pi]$; folglich ist γ rektifizierbar, und für ihre Länge L gilt

$$L = \int_0^{2\,\pi} \|K'(t)\|\,dt = \int_0^{2\,\pi} 2\,\sin\frac{t}{2}\,dt = \left[2\cdot\frac{-\cos\frac{t}{2}}{\frac{1}{2}}\right]_0^{2\,\pi} =$$

$$= -4\cdot\left[\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\,\pi} = -4\cdot(\cos\pi - \cos 0) = -4\cdot((-1)-1) = 8.$$

b) Die erste Koordinatenfunktion

$$\varphi : [0; 2\,\pi] \to \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = t - \sin t,$$

ist wegen $\varphi'(t) = 1 - \cos t > 0$ für alle $t \in \,]0; 2\pi[$ streng monoton wachsend mit dem Wertebereich $W_x = [\varphi(0); \varphi(2\pi)] = [0; 2\,\pi]$; damit tritt aber jedes $x \in [0; 2\,\pi]$ für genau ein $t \in \mathbb{R}$ auf, nämlich für

$$x = \varphi(t) \iff t = \varphi^{-1}(x),$$

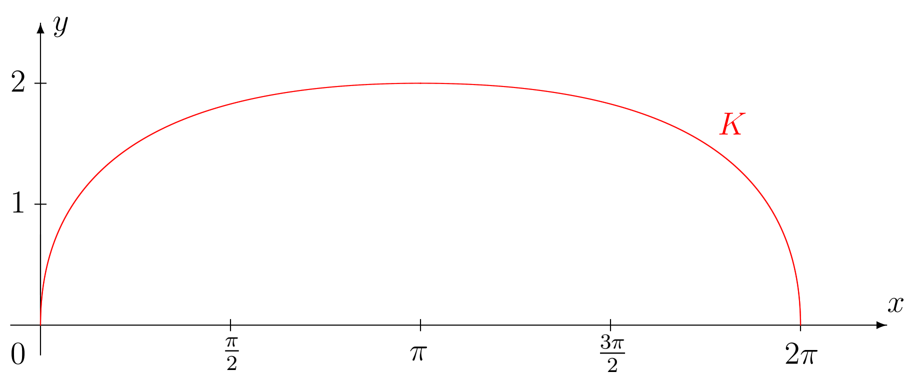
und das dazugehörige $y \in \mathbb{R}$ ist dann

$$y = \psi(t) = \psi\left(\varphi^{-1}(x)\right).$$

Folglich beschreibt die Kurve K den Graphen der Funktion

$$f : [0; 2\,\pi] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \psi\left(\varphi^{-1}(x)\right),$$

und es ist $f(\varphi(t)) = \psi(t)$ für alle $t \in [0; 2\,\pi]$.



Für den Inhalt A der Fläche, die von der Kurve und der x–Achse eingeschlossen wird, ergibt sich demnach mit Hilfe der Substitionsregel

$$A = \int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(2\pi)} f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2\,dt = \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\,\cos t + \cos^2 t\right)dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\,\cos t + \frac{\cos(2t)}{2}\right)dt = \left[\frac{3}{2}\,t - 2\,\sin t + \frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{2\pi} =$$

$$= \left(\frac{3}{2}\cdot 2\,\pi - 2\,\underbrace{\sin(2\,\pi)}_{=0} + \underbrace{\frac{\sin(4\,\pi)}{4}}_{=0}\right) - \left(0 - 2\,\underbrace{\sin 0}_{=0} + \underbrace{\frac{\sin 0}{4}}_{=0}\right) = 3\,\pi;$$

dabei geht die für alle $t \in \mathbb{R}$ gültige Beziehung $\cos^2 t = \frac{1}{2}\,(1 + \cos(2\,t))$ ein.

40. a) Das Dreieck Δ mit den Ecken $(0,-1)$, $(1,0)$ und $(0,1)$ besteht genau aus denjenigen Punkten $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit

$$x \geq 0 \quad \text{und} \quad y \leq 1-x \quad \text{und} \quad y \geq x-1.$$

Wir weisen diese drei Eigenschaften für jeden Kurvenpunkt $k(t) = (x,y)$ mit $t \in [0;1]$ nach; dabei ist $x = 2\,t\,(1-t)$ und $y = 1-2\,t$.

- Wegen $0 \leq t \leq 1$ ist $1 \geq 1-t \geq 0$ und damit

$$x = 2 \cdot \underbrace{t}_{\geq 0} \cdot \underbrace{(1-t)}_{\geq 0} \geq 0.$$

- Wegen

$$\begin{aligned} y-(1-x) = (1-2\,t) - (1-2\,t\,(1-t)) &= \\ &= 1-2\,t-1+2\,t-2\,t^2 = -2\,t^2 \leq 0 \end{aligned}$$

ist $y \leq 1-x$.

- Wegen

$$\begin{aligned} y-(x-1) = (1-2\,t) - (2\,t\,(1-t)-1) &= \\ &= 1-2\,t-2\,t+2\,t^2+1 = 2\left(t^2-2\,t+1\right) = 2\,(t-1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

ist $y \geq x-1$.

Damit liegt der Kurvenpunkt $k(t)$ mit $t \in [0;1]$ in Δ.

b) Wir verschaffen uns zunächst einen Überblick über die Gestalt der Kurve k. Die zweite Koordinatenfunktion

$$k_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad k_2(t) = 1-2\,t,$$

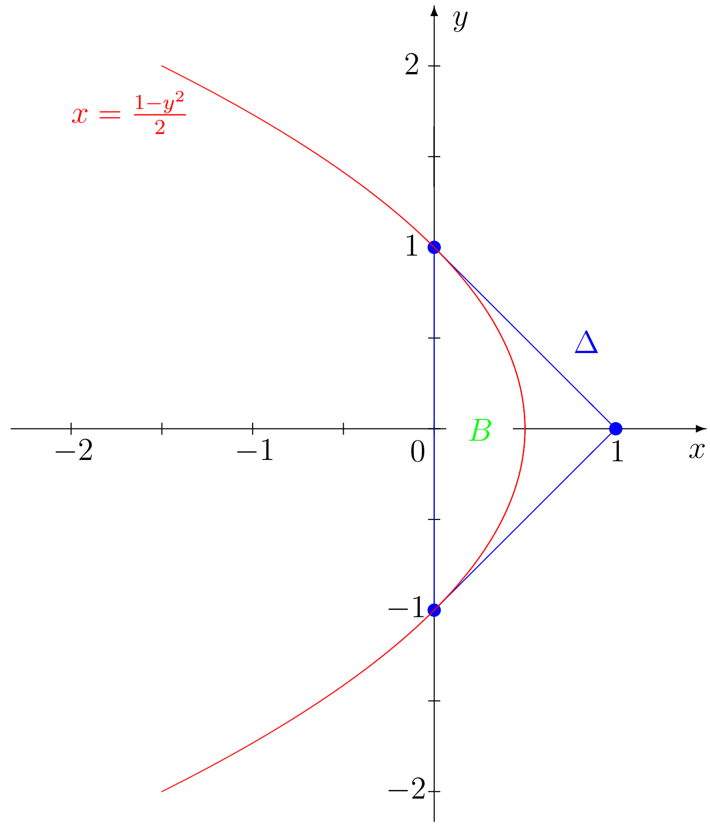
ist streng monoton fallend mit $W_{k_2} = \mathbb{R}$; damit tritt jedes $y \in \mathbb{R}$ für genau ein $t \in \mathbb{R}$ auf, nämlich für

$$y = 1-2\,t \iff t = \frac{1-y}{2},$$

und das dazugehörige x ist dann

$$\begin{aligned} x = 2\,t\,(1-t) = 2 \cdot \frac{1-y}{2} \cdot \left(1 - \frac{1-y}{2}\right) &= \\ &= (1-y) \cdot \frac{2-(1-y)}{2} = (1-y) \cdot \frac{1+y}{2} = \frac{1-y^2}{2}. \end{aligned}$$

Damit beschreibt k den nach links geöffneten Parabelbogen mit dem Scheitelpunkt $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ durch die beiden Ecken $(0,-1)$ und $(0,1)$ des Dreiecks Δ.



Wegen

$$x = \frac{1-y^2}{2} \iff 2x = 1 - y^2 \iff y^2 = 1 - 2x \iff y = \pm\sqrt{1-2x}$$

ist der von der Kurve und der y–Achse eingeschlossene Bereich

$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le \frac{1}{2} \text{ und } -\sqrt{1-2x} \le y \le \sqrt{1-2x}\right\}.$$

Für seine Fläche A_B gilt demnach aus Symmetriegründen

$$A_B = 2 \cdot \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-2x}\, dx = 2 \cdot \int_0^{\frac{1}{2}} (1-2x)^{\frac{1}{2}}\, dx = 2 \cdot \left[\frac{(1-2x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\cdot(-2)}\right]_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$= -\frac{2}{3} \cdot \left[\left(1 - 2\cdot\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \big(1 - 2\cdot 0\big)^{\frac{3}{2}}\right] = -\frac{2}{3}\cdot\big(0-1\big) = \frac{2}{3}.$$