MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2014
Blatt 9
18.06.2014

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“ — Bearbeitungsvorschlag —

33. Für $x \in \mathbb{R}$ besitzt der Punkt $(x; x^2)$ der gegebenen Parabel $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$ vom Punkt $(0; r)$ den Abstand

$$d(x) = \left|\left| \left(x; x^2\right) - (0; r) \right|\right| = \left|\left| \left(x; x^2 - r\right) \right|\right| = \sqrt{x^2 + \left(x^2 - r\right)^2},$$

der aufgrund des Monotonieverhaltens der Quadratwurzel genau dann minimal ist, wenn der Radikand

$$h(x) = x^2 + \left(x^2 - r\right)^2$$

minimal ist. Zunächst ist die Funktion

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = x^2 + \left(x^2 - r\right)^2,$$

als Polynomfunktion stetig und differenzierbar, und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$h'(x) = 2\,x + 2\left(x^2 - r\right) \cdot 2\,x = 4\,x \cdot \left(x^2 + \tfrac{1}{2} - r\right).$$

Wir treffen daher die folgende Fallunterscheidung:

- Für $r \leq \frac{1}{2}$ gilt

$$h'(x) = 4\,x \cdot \underbrace{\left(x^2 + \underbrace{\tfrac{1}{2} - r}_{\geq 0}\right)}_{>0} \begin{cases} < 0, & \text{für } x < 0, \\ > 0, & \text{für } x > 0; \end{cases}$$

  damit ist h auf $\mathbb{R}_0^-$ streng monoton fallend sowie auf $\mathbb{R}_0^+$ streng monoton steigend und nimmt daher genau für $x = 0$ das globale Minimum an. Folglich ist $(0, 0)$ der Punkt auf der Parabel $y = x^2$ mit dem kürzesten Abstand zu dem Punkt $(0, r)$.

- Für $r > \frac{1}{2}$ ist $r - \frac{1}{2} > 0$ mit

$$h'(x) = 4\,x \cdot \left(x^2 - \left(r - \tfrac{1}{2}\right)\right) = 4\,x \left(x - \sqrt{r - \tfrac{1}{2}}\right)\left(x + \sqrt{r - \tfrac{1}{2}}\right).$$

  Wegen $h'(x) < 0$ für alle $x \in \left]-\infty; -\sqrt{r - \frac{1}{2}}\right[\cup \left]0; \sqrt{r - \frac{1}{2}}\right[$ ist h auf $\left]-\infty; -\sqrt{r - \frac{1}{2}}\right]$ und $\left[0; \sqrt{r - \frac{1}{2}}\right[$ jeweils streng monoton fallend, und wegen $h'(x) > 0$ für alle $x \in \left]-\sqrt{r - \frac{1}{2}}; 0\right[\cup \left]\sqrt{r - \frac{1}{2}}; \infty\right[$ ist h auf

$\left[-\sqrt{r-\frac{1}{2}};0\right]$ und $\left[\sqrt{r-\frac{1}{2}};\infty\right[$ jeweils streng monoton steigend; daher nimmt h genau für $\pm\sqrt{r-\frac{1}{2}}$ das globale Minimum an. Folglich sind

$$\left(-\sqrt{r-\frac{1}{2}}, r-\frac{1}{2}\right) \qquad \text{und} \qquad \left(\sqrt{r-\frac{1}{2}}, r-\frac{1}{2}\right)$$

die beiden Punkte auf der Parabel $y = x^2$ mit dem kürzesten Abstand zu dem Punkt $(0, r)$.

Damit ist $(0, 0)$ genau dann der Punkt auf der Parabel $y = x^2$ mit dem kleinsten Abstand zu dem Punkt $(0, r)$, wenn $r \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$ gilt.

34. a) Wegen

$$\lim_{k\to\infty} a_{k,1} = \lim_{k\to\infty} \frac{2\,k}{k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{2}{1+\frac{1}{k}} = 2$$

und

$$\lim_{k\to\infty} a_{k,2} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{k^2+3} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1+\frac{3}{k^2}} = 1$$

gilt $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = (2; 1)$; insbesondere ist der Grenzwert $(2; 1)$ auch der einzige Häufungspunkt der Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$.

b) Die beiden Zahlenfolgen

$$(a_{k,1})_{k\in\mathbb{N}_0} = \left(\cos\tfrac{k\,\pi}{2}\right)_{k\in\mathbb{N}_0} = (1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \ldots)$$

und

$$(a_{k,2})_{k\in\mathbb{N}_0} = \left(\sin\tfrac{k\,\pi}{2}\right)_{k\in\mathbb{N}_0} = (0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \ldots)$$

divergieren; insbesondere ist auch die Punktfolge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ divergent. Für alle $j \in \mathbb{N}_0$ gilt aber

$$a_{4j} = (1; 0), \quad a_{4j+1} = (0; 1), \quad a_{4j+2} = (-1; 0) \quad \text{und} \quad a_{4j+3} = (0; -1);$$

damit besitzt die Punktfolge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ die vier Häufungspunkte $(1; 0)$, $(0; 1)$, $(-1; 0)$ und $(0; -1)$.

c) Wegen

$$\lim_{k\to\infty} a_{k,1} = \lim_{k\to\infty} \left(1+\frac{2}{k}\right)^k = e^2$$

und

$$\lim_{k\to\infty} a_{k,2} = \lim_{k\to\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^{2k} = \left(\lim_{k\to\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right)^2 = e^2$$

gilt $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = (e^2; e^2)$; insbesondere ist der Grenzwert $(e^2; e^2)$ der einzige Häufungspunkt der Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

d) Wegen

$$\lim_{j\to\infty} a_{2j,2} = \lim_{j\to\infty}\left(\underbrace{\sqrt{2j+1}}_{\to\infty}+\underbrace{(-1)^{2j}}_{=1}\underbrace{\sqrt{2j}}_{\to\infty}\right) = \infty$$

besitzt die Folge $(a_{k,2})_{k\in\mathbb{N}}$ eine unbeschränke Teilfolge und ist demnach insbesondere divergent; folglich divergiert auch die Punktfolge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Wegen

$$\lim_{k\to\infty} a_{k,1} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = 1$$

und

$$\begin{aligned} a_{2j-1,2} &= \sqrt{2j}+(-1)^{2j-1}\sqrt{2j-1} = \sqrt{2j}-\sqrt{2j-1} = \\ &= \frac{\sqrt{2j}^{\,2}-\sqrt{2j-1}^{\,2}}{\sqrt{2j}+\sqrt{2j-1}} = \frac{2j-(2j-1)}{\sqrt{2j}+\sqrt{2j-1}} = \frac{1}{\sqrt{2j}+\sqrt{2j-1}} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

besitzt $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die gegen $(1;0)$ konvergente Teilfolge $(a_{2j-1})_{j\in\mathbb{N}}$; folglich ist $(1;0)$ ein Häufungspunkt der Punktfolge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

35. Die Kurve

$$\gamma : \left[-\tfrac{1}{\sqrt{3}};\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \left(3\,t^2-1,\ 3\,t^3-t\right),$$

ist stetig differenzierbar mit

$$\gamma'(t) = \left(6\,t,\ 9\,t^2-1\right)$$

und damit

$$\begin{aligned} ||\gamma'(t)|| &= \sqrt{(6\,t)^2+(9\,t^2-1)^2} = \sqrt{36\,t^2+81\,t^4-18\,t^2+1} = \\ &= \sqrt{81\,t^4+18\,t^2+1} = \sqrt{(9\,t^2+1)^2} = 9\,t^2+1 \end{aligned}$$

für alle $t \in \left[-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$; folglich ist γ rektifizierbar, und für ihre Länge L gilt

$$\begin{aligned} L &= \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} ||\gamma'(t)||\,dt = \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(9\,t^2+1\right)\,dt = 2\cdot\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(9\,t^2+1\right)\,dt = \\ &= 2\cdot\left[3\,t^3+t\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 2\cdot\left(3\cdot\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

36. a) Die gegebene Kurve

$$f : [0;2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad f(t) = ((1-\cos t)\cos t, (1-\cos t)\sin t),$$

besitzt die beiden stetig differenzierbaren Koordinatenfunktionen

$$f_1 : [0;2\pi] \to \mathbb{R}, \quad f_1(t) = (1-\cos t)\cdot\cos t,$$

mit

$$f_1'(t) = \sin t\cdot\cos t + (1-\cos t)\cdot(-\sin t)$$

für alle $t \in [0; 2\pi]$ und

$$f_2 : [0; 2\pi] \to \mathbb{R}, \quad f_2(t) = (1 - \cos t) \cdot \sin t,$$

mit

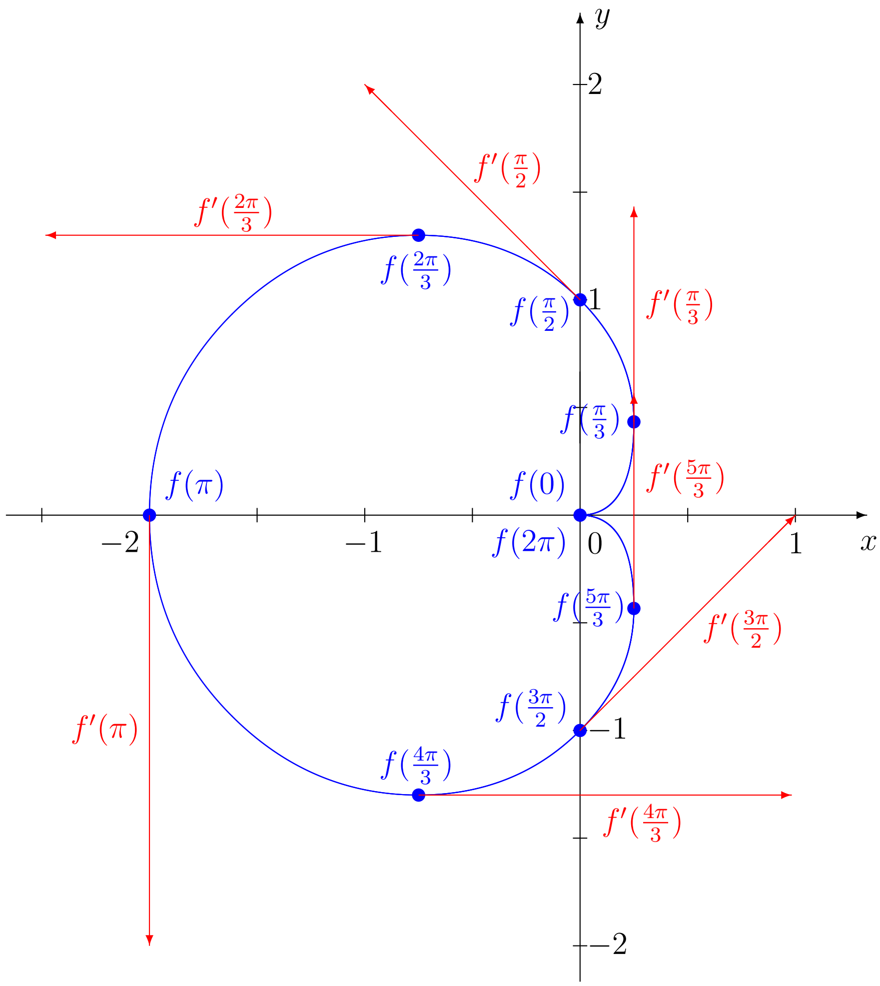
$$f_2'(t) = \sin t \cdot \sin t + (1 - \cos t) \cdot \cos t$$

für alle $t \in [0; 2\pi]$; folglich ist f eine stetig differenzierbare Kurve, und für alle $t \in [0; 2\pi]$ gilt $f'(t) = (f_1'(t);\ f_2'(t))$. Damit ergibt sich

t	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
$f(t)$	$(0, 0)$	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\sqrt{3})$	$(0, 1)$	$(-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\sqrt{3})$	$(-2, 0)$
$f'(t)$	$(0, 0)$	$(0, 1)$	$(-1, 1)$	$(-\sqrt{3}, 0)$	$(0, -2)$

t	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
$f(t)$	$(-\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}\sqrt{3})$	$(0, -1)$	$(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\sqrt{3})$	$(0, 0)$
$f'(t)$	$(\sqrt{3}, 0)$	$(1, 1)$	$(0, 1)$	$(0, 0)$

b) Wir tragen zunächst die neun in a) berechneten Kurvenpunkte $f(t)$ samt den zugehörigen Tangentialvektoren $f'(t)$ für $t \in \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}, 2\pi\right\}$ in das Koordinatensystem ein und skizzieren dann unter Berücksichtigung dieser Informationen die *Kardioide (Herzkurve)* genannte Kurve f.



c) Für alle $t \in [0; 2\pi]$ gilt

$$\begin{aligned}
||f'(t)||^2 &= f_1'(t)^2 + f_2'(t)^2 = \\
&= (\sin t\, \cos t - (1-\cos t)\, \sin t)^2 + (\sin t\, \sin t + (1-\cos t)\, \cos t)^2 = \\
&= \big(\sin^2 t\, \cos^2 t - 2\, \sin^2 t\, \cos t\,(1-\cos t) + (1-\cos t)^2\, \sin^2 t\big) + \\
&+ \big(\sin^2 t\, \sin^2 t + 2\, \sin^2 t\, \cos t\,(1-\cos t) + (1-\cos t)^2\, \cos^2 t\big) = \\
&= \sin^2 t\, \underbrace{\big(\cos^2 t + \sin^2 t\big)}_{=1} + (1-\cos t)^2\, \underbrace{\big(\sin^2 t + \cos^2 t\big)}_{=1} = \\
&= \sin^2 t + (1-\cos t)^2 = \sin^2 t + \big(1 - 2\, \cos t + \cos^2 t\big) = \\
&= 1 - 2\, \cos t + \underbrace{\big(\cos^2 t + \sin^2 t\big)}_{=1} = 2\,(1-\cos t) = 4\, \sin^2 \frac{t}{2}
\end{aligned}$$

und folglich wegen $\frac{t}{2} \in [0; \pi]$ und damit $\sin \frac{t}{2} \geq 0$ schließlich

$$||f'(t)|| = \sqrt{4\, \sin^2 \frac{t}{2}} = 2\, \sin \frac{t}{2}.$$

Die stetig differenzierbare Kurve f ist insbesondere rektifizierbar, und für ihre Bogenlänge L gilt

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{2\pi} ||f'(t)||\, dt = \int_0^{2\pi} 2\, \sin \frac{t}{2}\, dt = \left[\frac{2\,(-\cos \frac{t}{2})}{\frac{1}{2}} \right]_0^{2\pi} = \\
&\qquad \big(-4 \cdot \underbrace{\cos \pi}_{=-1}\big) - \big(-4 \cdot \underbrace{\cos 0}_{=1}\big) = 4 - (-4) = 8.
\end{aligned}$$