Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“ — Bearbeitungsvorschlag —

29. a) Die gegebene Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}\, x^n$ besitzt den Entwicklungspunkt $a = 0$ sowie die Koeffizienten $c_n = \dfrac{n+1}{2^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Wegen

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \left|\frac{(n+2)\cdot 2^n}{2^{n+1}\cdot(n+1)}\right| = \frac{1}{2}\cdot\frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2} = c$$

besitzt die Potenzreihe den Konvergenzradius $\varrho = \frac{1}{c} = 2$.

b) Nach dem Hauptsatz über Potenzreihen ist die Funktion

$$f : \,]-2;2[\, \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}\, x^n,$$

auf dem offenen Konvergenzintervall $D = \,]-2;2[$ stetig und damit insbesondere integrierbar, wobei sich eine Potenzreihendarstellung der Stammfunktion F mit $F(0) = 0$ durch gliedweises Integrieren ergibt; für alle $x \in \,]-2;2[$ gilt demnach

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{2^n} = x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n = \frac{x}{1-\frac{x}{2}} = \frac{2\,x}{2-x};$$

dabei geht die Summenformel für die wegen $\left|\frac{x}{2}\right| = \frac{|x|}{2} < 1$ konvergenten geometrischen Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n$ ein.

c) Für alle $x \in \,]-2;2[$ gilt gemäß b)

$$F(x) = \frac{2\,x}{2-x}$$

und damit

$$f(x) = F'(x) = \frac{(2-x)\cdot 2 - 2\,x\cdot(-1)}{(2-x)^2} = \frac{4-2\,x+2\,x}{(2-x)^2} = \frac{4}{(2-x)^2}.$$

30. Zu betrachten ist die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^n$$

mit dem Entwicklungspunkt $a = 0$ und den Koeffizienten $c_n = \frac{2^n}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen

$$\sqrt[n]{|c_n|} = \sqrt[n]{\left|\frac{2^n}{n}\right|} = \sqrt[n]{\frac{2^n}{n}} = \frac{\sqrt[n]{2^n}}{\sqrt[n]{n}} = \frac{2}{\sqrt[n]{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{1} = 2 = c$$

besitzt die Potenzreihe den Konvergenzradius $\varrho = \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$; damit ist diese für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \frac{1}{2}$ konvergent sowie für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-1| > \frac{1}{2}$ divergent; damit sind noch die verbleibenden Punkte $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| = \frac{1}{2}$ gesondert zu untersuchen: für $x = \frac{1}{2}$ ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2 \cdot \frac{1}{2})^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

als harmonische Reihe divergent, und für $x = -\frac{1}{2}$ ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2 \cdot (-\frac{1}{2}))^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

als alternierende harmonische Reihe konvergent. Damit ist der Konvergenzbereich der gegebenen Potenzreihe genau das halboffene Intervall $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right[$, wodurch die Funktion

$$f : \left[-\tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}\right[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^n,$$

definiert wird. Nach dem Hauptsatz über Potenzreihen ist f zumindest auf dem offenen Intervall $\left]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right[$ differenzierbar, und für alle $x \in \left]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right[$ gilt

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} n\, x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n\, x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1}\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2\,(2x)^n\,,$$

so daß sich wegen $|2\,x| = 2\,|x| < 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ unter Verwendung der Summenformel für geometrische Reihen

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2\,(2x)^n = \frac{2}{1-2\,x} = -\frac{-2}{1-2\,x}$$

ergibt. Damit gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, so daß

$$f(x) = -\ln|1-2\,x| + c \underset{1-2\,x>0}{=} -\ln(1-2\,x) + c$$

für alle $x \in \left]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right[$ gilt, wobei sich speziell für den Entwicklungspunkt $a = 0$ wegen

$$f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2 \cdot 0)^n}{n} = 0 \qquad \text{und} \qquad -\ln(1-2\cdot 0) = 0$$

dann $c = 0$ ergibt. Folglich ist

$$f(x) = -\ln(1 - 2x) \qquad \text{für alle} \quad x \in \left]-\tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}\right[;$$

da die Funktion f im Konvergenzpunkt $a - \varrho = -\frac{1}{2}$ der gegebenen Potenzreihe nach dem abelschen Grenzwertsatz zumindest stetig ist, folgt mit der Stetigkeit des Logarithmus auch

$$f\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \lim_{x \to -\frac{1}{2}+} f(x) = \lim_{x \to -\frac{1}{2}+} \left(-\ln(1 - 2x)\right) = -\ln\left(1 - 2 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right)\right) = -\ln 2,$$

also

$$f(x) = -\ln(1 - 2x) \qquad \text{für alle} \quad x \in \left[-\tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}\right[.$$

31. a) Für $x \in \mathbb{R}$ sei $a_n = (-1)^{n-1} \dfrac{1}{n} x^{2n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$; wegen

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left|(-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^{2n}\right|} = \sqrt[n]{\frac{x^{2n}}{n}} = \frac{\sqrt[n]{x^{2n}}}{\sqrt[n]{n}} = \frac{x^2}{\sqrt[n]{n}} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \frac{x^2}{1} = x^2$$

ist die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^{2n}$ nach dem Wurzelkriterium für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ konvergent sowie für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 1$ divergent. Des weiteren ist für die verbleibenden $x \in \{-1, 1\}$ die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ als alternierende harmonische Reihe konvergent.

b) Nach dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung ist die Funktion

$$F : [0; 1[\to \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^x \ln\left(t^2 + 1\right) dt,$$

differenzierbar mit $F'(x) = \ln(x^2 + 1)$ für alle $x \in [0; 1[$. Mit Hilfe der Reihenentwicklung des natürlichen Logarithmus

$$\ln(x + 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

für alle $x \in]-1; 1]$ ergibt sich damit insbesondere für alle $x \in [0; 1[$

$$F'(x) = \ln\left(x^2 + 1\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^{2n}.$$

Nach dem Hauptsatz über Potenzreihen darf die sogar auf $]-1; 1[$ konvergente Potenzreihe „gliedweise“ integriert werden, so daß wir

$$F(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right) + c$$

für alle $x \in [0;1[$ erhalten; dabei ergibt sich wegen

$$F(0) = \int_0^0 \ln\left(t^2+1\right)\,dt = 0 \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \frac{0^{2n+1}}{2n+1} = 0$$

für die noch bestimmende Integrationskonstante $c = 0$. Demnach gilt

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\,(2n+1)}\, x^{2n+1}$$

für alle $x \in [0;1[$.

32. Unter Verwendung der Exponentialreihe ergibt sich

$$e^{x^2} = \exp(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, x^{2n}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$; damit konvergiert die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und besitzt daher den Konvergenzradius $\varrho = \infty$. Insbesondere darf sie auf dem abgeschlossenen Teilintervall $[0;1]$ ihres Konvergenzbereichs $\mathbb{R}$ „gliedweise“ integriert werden, und wir erhalten

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{x^2}\,dx &= \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, x^{2n}\right) dx = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 = \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, \frac{1^{2n+1}}{2n+1}\right) - \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, \frac{0^{2n+1}}{2n+1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,(2n+1)}.\end{aligned}$$

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ der reellen Zahlen $a_n = \dfrac{1}{n!\,(2n+1)}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ leistet demnach das Gewünschte.