MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2014
Blatt 7
04.06.2014

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“ — Bearbeitungsvorschlag —

25. a) Bei der gegebenen Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^n}$$

handelt es sich wegen

$$\frac{x^{2n}}{3^n} = \frac{(x^2)^n}{3^n} = \left(\frac{x^2}{3}\right)^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ um die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \qquad \text{mit} \qquad q = \frac{x^2}{3};$$

diese konvergiert genau dann, wenn $|q| < 1$ gilt, wegen

$$|q| < 1 \iff \left|\frac{x^2}{3}\right| < 1 \iff \frac{x^2}{3} < 1 \iff x^2 < 3 \iff |x| < \sqrt{3}$$

also genau für $x \in \left]-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right[$.

b) Gemäß der Summenformel für geometrische Reihen gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \qquad \text{für alle} \qquad |q| < 1,$$

also

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^n} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{3}} = \frac{3}{3 - x^2} \qquad \text{für alle} \qquad x \in \left]-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right[;$$

damit wird die rationale Funktion

$$f : \left]-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{3}{3 - x^2},$$

durch die Potenzreihe auf ihrem Konvergenzbereich dargestellt.

26. Zu betrachten ist die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n\, x^n$ mit dem Entwicklungspunkt 0 und den Koeffizienten $c_n = \dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \left|\frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{\ln(n)}\right| = \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$$

mit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln(t+1)}{\ln(t)} \underset{„\frac{\infty}{\infty}“}{\overset{\text{L'H}}{=}} \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{1}{t+1}}{\frac{1}{t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{t+1} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{t}} = 1$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}} \underset{\sqrt{\cdot}\text{ stetig}}{=} \sqrt{\frac{1}{1+0}} = 1,$$

insgesamt also

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \Bigg(\underbrace{\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}}_{\to 1}\Bigg) = 1 = c,$$

besitzt die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}}\, x^n$ den Konvergenzradius $\varrho = \frac{1}{c} = 1$. Damit ist diese für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ absolut konvergent sowie für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 1$ divergent, weswegen noch der Fall $|x| = 1$ gesondert zu behandeln ist.

- Im Falle $x = 1$ ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ zu betrachten; wegen

$$c_n = \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \underset{\ln(n)\geq 1}{\geq} \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad \text{für alle} \quad n \geq 3$$

  besitzt die Reihe $\sum_{n=3}^{\infty} \dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$ die Reihe $\sum_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ als divergente Minorante und ist damit nach dem Minorantenkriterium selbst divergent, weswegen auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$ divergiert.

- Im Falle $x = -1$ ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (-1)^n$ zu betrachten; wir verwenden hierfür die Hilfsfunktion

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}.$$

Wegen

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \underset{„\frac{\infty}{\infty}“}{\overset{\text{L'H}}{=}} \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{2\sqrt{t}}} = \lim_{t\to\infty} \frac{2}{\sqrt{t}} = 0$$

ist $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, und wegen

$$f'(t) = \frac{\sqrt{t}\cdot\frac{1}{t} - \ln(t)\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}}{(\sqrt{t})^2} = \frac{2-\ln(t)}{2\,(\sqrt{t})^3} < 0 \qquad \text{für alle} \quad t > e^2$$

ist $(c_n)_{n\geq 8}$ monoton fallend; damit ist nach dem Leibnizschen Konvergenzkriterium die alternierende Reihe $\displaystyle\sum_{n=8}^{\infty}(-1)^n\,c_n = \sum_{n=8}^{\infty}\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}\,(-1)^n$ konvergent, weswegen auch die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}\,(-1)^n$ konvergiert.

Damit konvergiert die gegebene Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}\,x^n$ genau für $x \in [-1;1[$.

27. Zu betrachten ist die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(x+1)^n$$

mit dem Entwicklungspunkt $a = -1$ und den Koeffizienten c_n, für die nach Voraussetzung

$$\frac{1}{4} \leq |c_n| \leq 2^n \qquad \text{für alle} \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

gilt.

a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $-\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2}$ gilt $-\frac{1}{2} < x+1 < \frac{1}{2}$, also $|x+1| < \frac{1}{2}$, weshalb

$$q := 2\cdot|x+1| < 1$$

ist; wegen

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{|c_n\,(x+1)^n|} &= \sqrt[n]{|c_n|\cdot|x+1|^n} = \sqrt[n]{|c_n|}\cdot\sqrt[n]{|x+1|^n} = \\ &= \sqrt[n]{|c_n|}\cdot|x+1| \underset{|c_n|\leq 2^n}{\leq} \sqrt[n]{2^n}\cdot|x+1| = 2\cdot|x+1| = q\end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Reihe nach dem Wurzelkriterium konvergent.

b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x+1| \geq 1$ ergibt sich

$$|c_n\,(x+1)^n| = \underbrace{|c_n|}_{\geq\frac{1}{4}}\cdot\underbrace{|x+1|^n}_{\geq 1} \geq \frac{1}{4}\cdot 1^n = \frac{1}{4}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, so daß die Folge $(c_n\,(x+1)^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ der Reihenglieder keine Nullfolge ist und demnach die Reihe divergiert.

Damit ist die gegebene Potenzreihe

- gemäß a) für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x+1| < \frac{1}{2}$ konvergent, so daß für den Konvergenzradius $\varrho \geq \frac{1}{2}$ gilt, sowie
- gemäß b) für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x+1| \geq 1$ divergent, so daß für den Konvergenzradius $\varrho \leq 1$ gilt;

folglich läßt sich über den Konvergenzradius $\varrho \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ aussagen.

28. a) Die Funktion

$$f :]0; \infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln x,$$

ist beliebig oft differenzierbar, und für alle $x \in \mathbb{R}^+$ gilt

$$f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}, \quad f''(x) = (-1) \cdot x^{-2}, \quad f'''(x) = (-1) \cdot (-2) \cdot x^{-3},$$

$$f^{(4)}(x) = (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot x^{-4} \quad \text{usw.}$$

weswegen die Vermutung

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot x^{-n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ naheliegt; wir weisen dies mit vollständiger Induktion nach:
„$n = 1$“:

$$f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} = (-1)^0 \cdot 0! \cdot x^{-1}.$$

„$n \to n+1$“:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}\right)'(x) = \left((-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot x^{-n}\right)' = \\ &= (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot \left((-n) \cdot x^{-n-1}\right) = (-1)^n \cdot n! \cdot x^{-(n+1)}. \end{aligned}$$

Wegen

$$f(2) = \ln 2 \qquad \text{und} \qquad f^{(n)}(2) = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{2^n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

ergibt sich für die Taylorreihe von f mit dem Entwicklungspunkt $a = 2$

$$\begin{aligned} T_f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(2)}{n!} (x-2)^n = f(2) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(2)}{n!} (x-2)^n = \\ &= \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{2^n \cdot n!} (x-2)^n = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n} (x-2)^n \end{aligned}$$

für alle $x \in]0; \infty[$.

b) Bei der in a) bestimmten Taylorreihe $T_f(x)$ handelt es sich um eine Potenzreihe um den Entwicklungspunkt $a = 2$ mit den Koeffizienten

$$c_0 = \ln 2 \qquad \text{und} \qquad c_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n} \quad \text{für alle } \ n \in \mathbb{N}.$$

Wegen

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \left|\frac{(-1)^n \cdot 2^n \cdot n}{2^{n+1} \cdot (n+1) \cdot (-1)^{n-1}}\right| = \frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2(1+\frac{1}{n})} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} = c$$

ergibt sich für den Konvergenzradius $\varrho = \frac{1}{c} = 2$; damit ist die Potenzreihe konvergent für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-2| < 2$, also für alle $x \in \,]0;4[$, und divergent für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-2| > 2$, also für alle $x \in \,]-\infty;0[\,\cup\,]4;\infty[$. Für $x = 0$ ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n} (x-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n} (-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

als (negative) harmonische Reihe divergent, und für $x = 4$ ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n} (x-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n} 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

als alternierende harmonische Reihe konvergent. Insgesamt konvergiert also die Taylorreihe $T_f(x)$ genau für alle $x \in \,]0;4]$.