MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2014
Blatt 6
28.05.2014

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“ — Bearbeitungsvorschlag —

21. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, ist als Verkettung des Cosinus und einer linearen Funktion beliebig oft differenzierbar; mit der Kettenregel erhält man

- $f'(x) = -\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot 1 = -\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$,
- $f''(x) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot 1 = -\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ und
- $f'''(x) = -\left(-\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) \cdot 1 = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Wegen

$$f(0) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad f'(0) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad f''(0) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ergibt sich für das zweite Taylorpolynom T_2 von f zum Entwicklungspunkt $a = 0$ dann

$$T_2(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{x^2}{2\sqrt{2}}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Nach der Taylorformel gilt nun $f(x) = T_2(x) + R_3(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, insbesondere also $f(1) = T_2(1) + R_3(1)$, wobei es gemäß der Lagrangeschen Darstellung des Restgliedes ein ξ zwischen $a = 0$ und $x = 1$ mit

$$R_3(1) = \frac{f'''(\xi)}{3!} \cdot 1^3 = \frac{1}{6}\,f'''(\xi) = \frac{1}{6}\,\sin\left(\xi + \frac{\pi}{4}\right)$$

gibt; damit ergibt sich aber

$$\left|\cos\left(1 + \frac{\pi}{4}\right) - T_2(1)\right| = |f(1) - T_2(1)| = |R_3(1)| = \frac{1}{6} \cdot \underbrace{\left|\sin\left(\xi + \frac{\pi}{4}\right)\right|}_{\leq 1} \leq \frac{1}{6}.$$

22. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (2-x)\,\sin x$, ist als Produkt einer linearen Funktion und des Sinus beliebig oft differenzierbar, und mit Hilfe der Produktregel ergibt sich

$$f'(x) = (-1) \cdot \sin x + (2 - x) \cdot \cos x = -\sin x + (2 - x)\,\cos x$$

und

$$f''(x) = -\cos x + ((-1)\cdot\cos x + (2-x)\cdot(-\sin x)) = -2\,\cos x - (2-x)\,\sin x$$

sowie

$$f'''(x) = -2\,(-\sin x) - ((-1)\cdot\sin x + (2-x)\cdot\cos x) = 3\,\sin x - (2-x)\,\cos x$$

und

$$f^{(4)}(x) = 3\,\cos x - ((-1)\cdot\cos x + (2-x)\cdot(-\sin x)) = 4\,\cos x + (2-x)\,\sin x$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit ist

$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = 2, \qquad f''(0) = -2 \quad \text{und} \quad f'''(0) = -2,$$

und man erhält für das dritte Taylorpolynom T_3 von f zum Entwicklungspunkt $a = 0$

$$T_3(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = 2\,x - x^2 - \frac{1}{3}\,x^3$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Nach der Taylorformel gilt $f(x) = T_3(x) + R_4(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, wobei es zu jedem $x \in \mathbb{R}$ ein ξ zwischen dem Entwicklungspunkt $a = 0$ und x mit $R_4(x) = \dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\,x^4$ gibt; dabei gilt

$$\begin{aligned} |f^{(4)}(\xi)| &= |4\,\cos\xi + (2-\xi)\,\sin\xi| \le 4\,\underbrace{|\cos\xi|}_{\le 1} + |2-\xi|\cdot\underbrace{|\sin\xi|}_{\le 1} \le \\ &\le 4 + |2-\xi| \le 4 + (2+|\xi|) = 6 + \underbrace{|\xi|}_{\le |x|} \le 6 + |x| \end{aligned}$$

und damit

$$|f(x) - T_3(x)| = |R_4(x)| = \left|\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\,x^4\right| = \frac{|f^{(4)}(\xi)|}{24}\cdot|x^4| \le \frac{6+|x|}{24}\cdot|x|^4.$$

23. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x\,\sin x$, ist als Produkt der Exponentialfunktion und des Sinus beliebig oft differenzierbar; mit Hilfe der Produktregel erhält man

- $f'(x) = e^x\,\sin x + e^x\,\cos x = e^x\,(\sin x + \cos x)$,
- $f''(x) = e^x\,(\sin x + \cos x) + e^x\,(\cos x - \sin x) = 2\,e^x\,\cos x$,
- $f'''(x) = 2\,e^x\,\cos x + 2\,e^x\,(-\sin x) = 2\,e^x\,(\cos x - \sin x)$,
- $f^{(4)}(x) = 2\,e^x\,(\cos x - \sin x) + 2\,e^x\,(-\sin x - \cos x) = -4\,e^x\,\sin x$ und
- $f^{(5)}(x) = -4\,e^x\,\sin x - 4\,e^x\,\cos x = -4\,e^x\,(\sin x + \cos x)$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Wegen

$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = 1, \qquad f''(0) = 2, \qquad f'''(0) = 2 \quad \text{und} \quad f^{(4)}(0) = 0$$

ergibt sich für das vierte Taylorpolynom T_4 von f zum Entwicklungspunkt $a = 0$ dann

$$T_4(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\,x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}\,x^4 = x + x^2 + \frac{x^3}{3}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Nach der Taylorformel gilt nun $f(x) = T_4(x) + R_5(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, wobei es gemäß der Lagrangeschen Darstellung des Restgliedes zu jedem $x \in \mathbb{R}$ ein ξ_x zwischen $a = 0$ und x mit $R_5(x) = \frac{f^{(5)}(\xi_x)}{5!}\,x^5$ gibt. Für $x \neq 0$ erhält man damit

$$\frac{f(x) - T_4(x)}{x^4} = \frac{R_5(x)}{x^4} = \left(\frac{f^{(5)}(\xi_x)}{120}\,x^5\right) \cdot \frac{1}{x^4} = \frac{x}{120} \cdot f^{(5)}(\xi_x);$$

beim Grenzübergang $x \to 0$ ergibt sich auch $\xi_x \to 0$, woraus wegen der Stetigkeit der fünften Ableitung $f^{(5)}$ dann $f^{(5)}(\xi_x) \to f^{(5)}(0) = -4$ folgt. Insgesamt erhält man also

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - T_4(x)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \left(\underbrace{\frac{x}{120}}_{\to 0} \cdot \underbrace{f^{(5)}(\xi_x)}_{\to -4}\right) = 0 \cdot (-4) = 0.$$

Wir können also $p = T_4$ wählen. Des weiteren gilt

$$|f(x) - T_4(x)| = |R_5(x)| = \left|\frac{f^{(5)}(\xi_x)}{5!}\,x^5\right| = \left|-4\,e^{\xi_x}\,(\sin\xi_x + \cos\xi_x)\right| \cdot \frac{|x|^5}{120} \leq$$

$$\leq 4\,e^{\xi_x}\left(\underbrace{|\sin\xi_x|}_{\leq 1} + \underbrace{|\cos\xi_x|}_{\leq 1}\right) \cdot \frac{|x|^5}{120} \underset{\xi_x \leq \frac{1}{2}}{\leq} 8\,e^{\xi_x} \cdot \frac{|x|^5}{120} \underset{|x| \leq \frac{1}{2}}{\leq} 8\,e^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{120} = \frac{\sqrt{e}}{480}$$

für alle $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$; dabei geht ein, daß die Exponentialfunktion monoton wächst.

24. a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(\sin x)$ ist als Hintereinanderausführung von Cosinus und Sinus beliebig oft differenzierbar, und unter Verwendung der Kettenregel sowie (für die höheren Ableitungen) der Produktregel ergibt sich

$$f'(x) = -\sin(\sin x) \cdot \cos x$$

und

$$f''(x) = -\cos(\sin x) \cdot \cos^2 x + \sin(\sin x) \cdot \sin x$$

sowie (für die bei b) benötigte Restglieddarstellung)

$$\begin{aligned} f'''(x) = \sin(\sin x) \cdot \cos^3 x - \cos(\sin x) \cdot 2\,\cos x\,(-\sin x) + \\ + \cos(\sin x) \cdot \cos x \cdot \sin x + \sin(\sin x) \cdot \cos x \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit ist

$$f(0) = 1, \qquad f'(0) = 0 \qquad \text{und} \qquad f''(0) = -1,$$

und man erhält für das zweite Taylorpolynom T_2 von f zum Entwicklungspunkt $a = 0$ dann

$$T_2(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 = 1 - \frac{1}{2}\,x^2$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Nach der Taylorformel gilt $f(x) = T_2(x) + R_3(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, wobei es zu jedem $x \in \mathbb{R}$ ein ξ zwischen dem Entwicklungspunkt 0 und x mit $R_3(x) = \dfrac{f'''(\xi)}{3!}\,x^3$ gibt; dabei gilt

$$\begin{aligned} |f'''(\xi)| &= |\sin(\sin\xi)\cdot\cos^3\xi + 2\,\cos(\sin\xi)\cdot\cos\xi\cdot\sin\xi + \\ &\quad + \cos(\sin\xi)\cdot\cos\xi\cdot\sin\xi + \sin(\sin\xi)\cdot\cos\xi| \leq \\ &\leq \underbrace{|\sin(\sin\xi)|}_{\leq 1}\cdot\underbrace{|\cos\xi|^3}_{\leq 1} + 2\,\underbrace{|\cos(\sin\xi)|}_{\leq 1}\cdot\underbrace{|\cos\xi|}_{\leq 1}\cdot\underbrace{|\sin\xi|}_{\leq 1} + \\ &\quad + \underbrace{|\cos(\sin\xi)|}_{\leq 1}\cdot\underbrace{|\cos\xi|}_{\leq 1}\cdot\underbrace{|\sin\xi|}_{\leq 1} + \underbrace{|\sin(\sin\xi)|}_{\leq 1}\cdot\underbrace{|\cos\xi|}_{\leq 1} \leq \\ &\leq 1\cdot 1^3 + 2\cdot 1\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 1 = 1 + 2 + 1 + 1 = 5. \end{aligned}$$

Speziell für die Stelle $x = \frac{1}{2}$ ergibt sich

$$q = T_2\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \in \mathbb{Q}$$

mit

$$\begin{aligned} \left|q - f\left(\frac{1}{2}\right)\right| &= \left|T_2\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \left|R_3\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \\ &= \left|\frac{f'''(\xi)}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3\right| = \frac{1}{48}\,|f'''(\xi)| \leq \frac{1}{48}\cdot 5 < \frac{1}{25}\cdot 5 = 0{,}2. \end{aligned}$$