MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2014
Blatt 5
21.05.2014

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“ — Bearbeitungsvorschlag —

17. a) Die Funktion

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+a}} = x^{-\frac{1}{2}} - (x+a)^{-\frac{1}{2}},$$

ist differenzierbar mit

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{3}{2}} - (-\frac{1}{2}) \cdot (x+a)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{x+a}^3} - \frac{1}{\sqrt{x}^3} \right) < 0$$

für alle $x > 0$; folglich ist f streng monoton fallend. Für das Verhalten von f am Rande des Definitionsbereichs ergibt sich

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}}_{\to\infty} - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x+a}}}_{\to\frac{1}{\sqrt{a}}} \xrightarrow[x\to 0]{} \infty \quad \text{und} \quad f(x) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x+a}}}_{\to 0} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0.$$

b) Es ist

$$F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \frac{(x+a)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2\left(\sqrt{x} - \sqrt{x+a}\right)$$

eine Stammfunktion von f.

c) Wir untersuchen zunächst die beiden uneigentlichen Integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ und $\int_1^\infty f(x)\,dx$ jeweils auf Konvergenz:

- Für alle $0 < \alpha < 1$ gilt

$$\int_\alpha^1 f(x)\,dx = F(1) - F(\alpha) = F(1) - 2\big(\underbrace{\sqrt{\alpha}}_{\to\sqrt{0}} - \underbrace{\sqrt{\alpha+a}}_{\to\sqrt{0+a}}\big) \xrightarrow[\alpha\to 0+]{}$$

$$\longrightarrow F(1) - 2\left(0 - \sqrt{a}\right) = F(1) + 2\sqrt{a};$$

damit konvergiert das uneigentliche Integral 2. Art $\int_0^1 f(x)\,dx$, und sein Wert ist $\int_0^1 f(x)\,dx = F(1) + 2\sqrt{a}$.

- Für alle $1 < \beta$ gilt

$$\int_1^\beta f(x)\,dx = F(\beta) - F(1) = 2\left(\sqrt{\beta} - \sqrt{\beta + a}\right) - F(1) =$$
$$= 2 \cdot \frac{\beta - (\beta + a)}{\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta + a}} - F(1) = -\underbrace{\frac{2\,a}{\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta + a}}}_{\to 0} - F(1) \underset{\beta \to \infty}{\longrightarrow} -F(1);$$

damit konvergiert das uneigentliche Integral 1. Art $\int_1^\infty f(x)\,dx$, und sein Wert ist $\int_1^\infty f(x)\,dx = -F(1)$.

Folglich konvergiert das zu untersuchende uneigentliche Integral $\int_0^\infty f(x)\,dx$, und für seinen Wert gilt

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^\infty f(x)\,dx = \left(F(1) + 2\sqrt{a}\right) - F(1) = 2\sqrt{a}.$$

18. Wir bestimmen das Konvergenzverhalten der gegebenen Reihen

$$\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n\,\ln n} \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=2}^\infty \frac{\ln n}{n\sqrt{n}}$$

mit Hilfe des Integralvergleichskriteriums und betrachten dazu die beiden Funktionen

$$f : [2; \infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x\,\ln x},$$

und

$$g : [2; \infty[\to \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{\ln x}{x\sqrt{x}} = x^{-\frac{3}{2}}\,\ln x.$$

- Für alle $2 \leq x_1 \leq x_2$ ist $0 < \ln 2 \leq \ln x_1 \leq \ln x_2$ und damit

$$0 < x_1\,\ln x_1 \leq x_2\,\ln x_2 \quad \text{sowie} \quad f(x_1) = \frac{1}{x_1\,\ln x_1} \geq \frac{1}{x_2\,\ln x_2} = f(x_2),$$

weswegen f monoton fallend ist; ferner gilt $f(x) \geq 0$ für alle $x \geq 2$. Wegen

$$\int_2^b f(x)\,dx = \int_2^b \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx = [\ln|\ln x|]_2^b = \underbrace{\ln|\ln b|}_{\to\infty} - \ln(\ln 2) \underset{b \to \infty}{\longrightarrow} \infty;$$

ist das uneigentliche Integral $\int_2^\infty f(x)\,dx$ nicht konvergent, so daß auch die Reihe $\sum_{n=2}^\infty f(n)$, also $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n\,\ln n}$, divergiert.

- Die Funktion g ist als Produkt einer Potenzfunktion und des Logarithmus differenzierbar, und es gilt

$$g'(x) = -\frac{3}{2}\,x^{-\frac{5}{2}} \cdot \ln x + x^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{x} = \left(1 - \frac{3}{2}\,\ln x\right) \cdot x^{-\frac{5}{2}} \le 0$$

für alle $x \ge 2$, weswegen g monoton fallend ist; ferner gilt $g(x) \ge 0$ für alle $x \ge 2$. Mit Hilfe der in der Vorlesung (durch partielle Integration) ermittelten Stammfunktion

$$G : [2, \infty[\to \mathbb{R}, \quad G(x) = \frac{x^{r+1}}{(r+1)^2}\,((r+1)\,\ln x - 1) \underset{r=-\frac{3}{2}}{=} -\frac{2\,(2+\ln x)}{\sqrt{x}},$$

erhält man

$$\int_2^b g(x)\,dx = \left[-\frac{2\,(2+\ln x)}{\sqrt{x}}\right]_2^b = -\frac{2\,(2+\ln b)}{\sqrt{b}} + \sqrt{2}\,(2+\ln 2)\,;$$

nach der Regel von de l'Hospital gilt

$$\lim_{b\to\infty} \frac{2\,(2+\ln b)}{\sqrt{b}} = \lim_{b\to\infty} \frac{2 \cdot \frac{1}{b}}{\frac{1}{2\sqrt{b}}} = \lim_{b\to\infty} \frac{4\sqrt{b}}{b} = \lim_{b\to\infty} \frac{4}{\sqrt{b}} = 0$$

und damit

$$\int_2^\infty g(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_2^b g(x)\,dx = \sqrt{2}\,(2+\ln 2)\,.$$

Folglich ist das uneigentliche Integral $\int_2^\infty g(x)\,dx$ konvergent, so daß auch die Reihe $\sum_{n=2}^\infty g(n)$, also $\sum_{n=2}^\infty \frac{\ln n}{n\sqrt{n}}$, konvergiert.

19. a) Die gegebene Funktion

$$f : \,]1, \infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x \ln x} = (x \cdot \ln x)^{-1}\,,$$

ist als Komposition einer Potenzfunktion und dem Produkt einer linearen Funktion und des natürlichen Logarithmus differenzierbar, und für alle $x > 1$ gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-1)\,(x \cdot \ln x)^{-2} \cdot \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) \\ &= \underbrace{-\frac{1}{(x \ln x)^2}}_{<0} \cdot \underbrace{\big(\underbrace{\ln x}_{>\ln 1 = 0} + 1\big)}_{>1>0} < 0; \end{aligned}$$

damit ist die Funktion f auf dem Intervall $]1, \infty[$ streng monoton fallend.

b) Es ist $\ln :]1, \infty[\to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $\ln' x = \frac{1}{x}$ für alle $x > 1$, und gemäß der Substitutionsregel $(*)$ ergibt sich damit

$$\begin{aligned} \int_e^{e^2} f(x)\, dx &= \int_e^{e^2} \frac{1}{x\, \ln x}\, dx = \int_e^{e^2} \left(\frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} \right) dx \\ &= \int_e^{e^2} \frac{1}{\ln x} \cdot \ln' x\, dx \underset{(*)}{=} \int_{\ln e}^{\ln e^2} \frac{1}{u}\, du \\ &= \int_1^2 \frac{1}{u}\, du = \big[\ln |u| \big]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2. \end{aligned}$$

20. a) Die gegebene Funktion

$$f_n : [0, \infty[\to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = n^2\, x \cdot e^{-nx},$$

ist (als Produkt und Verkettung linearer Funktionen und der Exponentialfunktion) stetig und differenzierbar mit

$$f_n'(x) = n^2 \cdot e^{-nx} + n^2\, x \cdot \big(e^{-nx}\, (-n) \big) = n^2\, e^{-nx}\, (1 - n\, x)$$

für alle $x \in [0, \infty[$. Wegen

$$f_n'(x) = \underbrace{n^2\, e^{-nx}}_{>0} \cdot \underbrace{(1 - n\, x)}_{>0} > 0$$

für alle $x \in \big[0; \frac{1}{n}\big[$ ist f auf $\big[0; \frac{1}{n}\big]$ streng monoton wachsend, und wegen

$$f_n'(x) = \underbrace{n^2\, e^{-nx}}_{>0} \cdot \underbrace{(1 - n\, x)}_{<0} < 0$$

für alle $x \in \big]\frac{1}{n}, \infty\big[$ ist f auf $\big[\frac{1}{n}, \infty\big[$ streng monoton fallend; insbesondere besitzt also f in $a = \frac{1}{n}$ ein globales Maximum mit

$$f(a) = n^2 \cdot \frac{1}{n} \cdot e^{-n \cdot \frac{1}{n}} = n \cdot e^{-1} = \frac{n}{e}.$$

Da ferner

$$f_n(x) = \underbrace{n^2}_{>0} \cdot \underbrace{x}_{\geq 0} \cdot \underbrace{e^{-nx}}_{>0} \geq 0$$

für alle $x \in [0, \infty[$ gilt, ergibt sich zunächst $W_n \subseteq \big[0; \frac{n}{e}\big]$; zum Nachweis von „$\supseteq$“ sei $y \in \big[0; \frac{n}{e}\big]$, und wegen

$$f_n(0) = 0 \leq y \leq \frac{n}{e} = f_n(a)$$

gibt es für die stetige Funktion f_n nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in [0; a]$ mit $f_n(\xi) = y$, es ist also $y \in W_n$ und folglich insgesamt $W_n = \big[0; \frac{n}{e}\big]$.

b) Mit Hilfe partieller Integration ergibt sich

$$\int f_n(x)\,dx = \int \underbrace{n^2\,x}_{u(x)} \cdot \underbrace{e^{-nx}}_{v'(x)} = \underbrace{n^2\,x}_{u(x)} \cdot \underbrace{\frac{e^{-nx}}{-n}}_{v(x)} - \int \underbrace{n^2}_{u'(x)} \cdot \underbrace{\frac{e^{-nx}}{-n}}_{v(x)}\,dx =$$

$$= -n\,x\,e^{-nx} + n\int e^{-nx}\,dx = -n\,x\,e^{-nx} + n\,\frac{e^{-nx}}{-n} + C =$$

$$= -n\,x\,e^{-nx} - e^{-nx} + C = -\left(n\,x+1\right)e^{-nx} + C,$$

so daß etwa

$$F_n : [0,\infty[\,\to \mathbb{R}, \quad F_n(x) = -\left(n\,x+1\right)e^{-nx},$$

eine Stammfunktion von f_n ist.

c) Für jedes $x > 0$ gilt zunächst

$$n\,x \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \qquad \text{und damit} \qquad e^{n\,x} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Wir fassen die zu betrachtenden Folgengrenzwerte (also für $n \in \mathbb{N}$) als Funktionengrenzwerte (sogar für $n \in \mathbb{R}^+$) auf und erhalten mit Hilfe der Regel von de l'Hospital zum einen

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} n^2\,x \cdot e^{-nx} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\,x}{e^{nx}} \underset{„\frac{\infty}{\infty}“}{\overset{\text{L'H}}{=}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2\,n\,x}{x\,e^{nx}} \underset{„\frac{\infty}{\infty}“}{\overset{\text{L'H}}{=}} \lim_{n\to\infty} \frac{2\,x}{x^2\,e^{nx}} = 0$$

und zum anderen

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^x f_n(\xi)\,d\xi = \lim_{n\to\infty} \left(F_n(x) - F_n(0)\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \Big(-\left(n\,x+1\right)e^{-nx} - (-1)\Big) = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{n\,x+1}{e^{nx}} \underset{„\frac{\infty}{\infty}“}{\overset{\text{L'H}}{=}}$$

$$= 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{x}{x\,e^{nx}} = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{nx}} = 1 - 0 = 1.$$