MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2014
Blatt 4
14.05.2014

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“ — Bearbeitungsvorschlag —

13. a) Wir bestimmen α, $\beta \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x+2} = \frac{1}{(x+1)\,(x+2)}$$

für alle $x \in [0;1]$. Wegen

$$\frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x+2} = \frac{\alpha\,(x+2) + \beta\,(x+1)}{(x+1)\,(x+2)} = \frac{(\alpha+\beta)\,x + (2\,\alpha+\beta)}{(x+1)\,(x+2)}$$

liefert der Koeffizientenvergleich $\alpha + \beta = 0$ und $2\,\alpha + \beta = 1$, also $\alpha = 1$ und $\beta = -1$. Damit ergibt sich

$$\int \frac{1}{(x+1)\,(x+2)}\,dx = \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right)\,dx =$$
$$= \int \frac{1}{x+1}\,dx - \int \frac{1}{x+2}\,dx = \ln|x+1| - \ln|x+2| + C = \ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right| + C$$

und damit

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+1)\,(x+2)}\,dx = \left[\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|\right]_0^1 = \ln\frac{2}{3} - \ln\frac{1}{2} = \ln\frac{4}{3}.$$

b) Mit Hilfe der in a) gezeigten Partialbruchzerlegung ergibt sich für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)\,(k+2)} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1;$$

damit ist die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\,(n+2)}$ konvergent, und für ihre Summe gilt $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\,(n+2)} = 1$.

14. a) Mit Hilfe partieller Integration erhält man

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \underbrace{e^x}_{v'(x)} \cdot \underbrace{\sin x}_{u(x)}\,dx &= \Big[\underbrace{e^x}_{v(x)} \cdot \underbrace{\sin x}_{u(x)}\Big]_0^\pi - \int_0^\pi \underbrace{e^x}_{v(x)} \cdot \underbrace{\cos x}_{u'(x)}\,dx \\
&= \Big(e^\pi \cdot \underbrace{\sin\pi}_{=0} - e^0 \cdot \underbrace{\sin 0}_{=0}\Big) - \int_0^\pi e^x \cos x\,dx \\
&= -\int_0^\pi e^x \cos x\,dx.
\end{aligned}$$

b) Mit erneuter partieller Integration ergibt sich ferner

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi e^x \sin x\,dx &\underset{\text{a)}}{=} -\int_0^\pi \underbrace{e^x}_{v'(x)} \cdot \underbrace{\cos x}_{u(x)}\,dx \\
&= -\bigg(\Big[\underbrace{e^x}_{v(x)} \cdot \underbrace{\cos x}_{u(x)}\Big]_0^\pi - \int_0^\pi \underbrace{e^x}_{v(x)} \cdot \big(\underbrace{-\sin x}_{u'(x)}\big)\,dx\bigg) \\
&= -\bigg(\Big(e^\pi \cdot \underbrace{\cos\pi}_{=-1} - e^0 \cdot \underbrace{\cos 0}_{=1}\Big) + \int_0^\pi e^x \sin x\,dx\bigg) \\
&= -\big(-e^\pi - 1\big) - \int_0^\pi e^x \sin x\,dx,
\end{aligned}$$

woraus man

$$2 \cdot \int_0^\pi e^x \sin x\,dx = e^\pi + 1$$

und damit schließlich

$$\int_0^\pi e^x \sin x\,dx = \frac{1+e^\pi}{2}$$

erhält.

15. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sin^3 t = \sin^2 t \cdot \sin t = \big(1-\cos^2 t\big) \cdot \sin t = \big(\cos^2 t - 1\big) \cdot (-\sin t),$$

so daß sich mit der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 - 1,$$

und der Substition

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(t) = \cos t, \qquad \text{mit} \qquad g'(t) = -\sin t$$

dann

$$\begin{aligned}
&\int \sin^3 t\,dt = \int \big(\cos^2 t - 1\big) \cdot (-\sin t)\,dt = \int f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt = \\
&\qquad = \int f(x)\,dx = \int \big(x^2-1\big)\,dx = \frac{x^3}{3} - x + C = \frac{\cos^3 t}{3} - \cos t + C
\end{aligned}$$

ergibt. Des weiteren ist

$$\int_{\pi^2}^{4\pi^2} \sin\sqrt{t}\,dt = \int_{\pi^2}^{4\pi^2} 2\sqrt{t}\sin\sqrt{t}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt;$$

die Substitionsregel liefert für

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x) = 2\,x\,\sin x,$$

sowie

$$g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R},\quad g(t)=\sqrt{t},\qquad \text{mit}\quad g'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}$$

für alle $t\in\mathbb{R}^+$ damit

$$\begin{aligned}
\int_{\pi^2}^{4\pi^2} \sin\sqrt{t}\,dt &= \int_{\pi^2}^{4\pi^2} f(g(t))\cdot g'(t)\,dt = \int_{g(\pi^2)}^{g(4\pi^2)} f(x)\,dx \\
&= \int_{\pi}^{2\pi} 2\,x\cdot\sin x\,dx = 2\cdot\int_{\pi}^{2\pi} \underbrace{x}_{u(x)}\cdot\underbrace{\sin x}_{v'(x)}\,dx \\
&= 2\cdot\left(\left[\underbrace{x}_{u(x)}\cdot\underbrace{(-\cos x)}_{v(x)}\right]_{\pi}^{2\pi} - \int_{\pi}^{2\pi}\underbrace{1}_{u'(x)}\cdot\underbrace{(-\cos x)}_{v(x)}\,dx\right) \\
&= 2\cdot\left(\left[2\pi\cdot(-\underbrace{\cos 2\pi}_{=1}) - \pi\cdot(-\underbrace{\cos\pi}_{=-1})\right] + \int_{\pi}^{2\pi}\cos x\,dx\right) \\
&= 2\cdot\left(\left[-2\pi-\pi\right] + \left[\sin x\right]_{\pi}^{2\pi}\right) \\
&= 2\cdot\left(-3\pi + \left[\underbrace{\sin 2\pi}_{=0} - \underbrace{\sin\pi}_{=0}\right]\right) = -6\,\pi.
\end{aligned}$$

16. Wir versuchen, eine Stammfunktion zu

$$f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R},\quad f(x)=\frac{x}{(1+x^2)^2}\cdot\ln x,$$

mittels partieller Integration mit $u'(x)=\dfrac{x}{(1+x^2)^2}$ und $v(x)=\ln x$ zu ermitteln; für die dazu notwendige Bestimmung von $u(x)$ verwenden wir die Substitution $g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$, $g(t)=1+t^2$, mit $g'(t)=2\,t$ für alle $t\in\mathbb{R}^+$ und erhalten mit der Substitutionsregel

$$\begin{aligned}
\int u'(t)\,dt = \int\frac{t}{(1+t^2)^2}\,dt = \frac{1}{2}\int\frac{1}{(g(t))^2}\cdot g'(t)\,dt = \\
= \frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x}\right) + C = -\frac{1}{2(1+t^2)} + C.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\int f(x)\,dx = \int \underbrace{\frac{x}{(1+x^2)^2}}_{u'(x)} \cdot \underbrace{\ln x}_{v(x)} =$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{2(1+x^2)}}_{u(x)} \cdot \underbrace{\ln x}_{v(x)} - \int \underbrace{-\frac{1}{2(1+x^2)}}_{u(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{v'(x)}\,dx =$$

$$= -\frac{\ln x}{2\,(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(1+x^2)\cdot x}\,dx.$$

Das nun entstandene Integral behandeln wir mit Hilfe der Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{(1+x^2)\,x} = \frac{\alpha\,x+\beta}{1+x^2} + \frac{\gamma}{x}$$

mit geeigneten Konstanten α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$; wegen

$$\frac{\alpha\,x+\beta}{1+x^2} + \frac{\gamma}{x} = \frac{(\alpha\,x+\beta)\,x + \gamma\,(1+x^2)}{(1+x)^2\,x} = \frac{(\alpha+\gamma)\,x^2 + \beta\,x + \gamma}{(1+x)^2\,x}$$

liefert der Koeffizientenvergleich $\alpha+\gamma = 0$, $\beta = 0$ und $\gamma = 1$, also $\alpha = -1$. Damit ergibt sich

$$\int \frac{1}{(1+x^2)\cdot x}\,dx = \int \left(\frac{-x}{1+x^2} + \frac{1}{x}\right)dx = -\frac{1}{2}\int \frac{2\,x}{1+x^2}\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + \ln|x| + C = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \ln x + C$$

sowie insgesamt

$$\int f(x)\,dx = -\frac{\ln x}{2\,(1+x^2)} - \frac{1}{4}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\ln x + C.$$

Damit ist etwa

$$F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad F(x) = -\frac{\ln x}{2\,(1+x^2)} - \frac{1}{4}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\ln x$$

eine Stammfunktion von f.