MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2014
Blatt 3
07.05.2014

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“ — Bearbeitungsvorschlag —

9. a) Wegen

$$f(x) = 0 \iff 3\,x\,(x-1)^2 = 0 \iff x = 0 \text{ oder } x = 1$$

besitzt f genau die beiden Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$. Wegen

$$f(x) = \underbrace{3\,x}_{<0} \cdot \underbrace{(x-1)^2}_{>0} < 0$$

für alle $x < 0$ verläuft G_f im Bereich $]-\infty; 0[$ unterhalb der x–Achse, und wegen

$$f(x) = \underbrace{3\,x}_{>0} \cdot \underbrace{(x-1)^2}_{>0} > 0$$

für alle $x > 0$ mit $x \neq 1$ verläuft G_f in den Bereichen $]0; 1[$ und $]1; \infty[$ jeweils oberhalb der x–Achse. Ferner ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als Polynomfunktion beliebig oft differenzierbar, und wegen $f(x) = 3\,x^3 - 6\,x^2 + 3\,x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f'(x) = 9\,x^2 - 12\,x + 3 \qquad \text{und} \qquad f''(x) = 18\,x - 12.$$

Als Kandidaten für lokale Extremstellen von f kommen hier also nur die Nullstellen von f' in Frage, und es gilt

$$f'(x) = 0 \implies 9\,x^2 - 12\,x + 3 = 0 \implies 3\,x^2 - 4\,x + 1 = 0 \implies$$
$$x = \frac{1}{2 \cdot 3}\left(-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}\right) = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6},$$

also $x_3 = 1$ und $x_4 = \frac{1}{3}$. Wegen $f'(x_3) = 0$ und $f''(x_3) = 6 > 0$ besitzt f in $x_3 = 1$ ein isoliertes lokales Minimum $T(1; 0)$, und wegen $f'(x_4) = 0$ und $f''(x_4) = -6 < 0$ besitzt f in $x_4 = \frac{1}{3}$ ein isoliertes lokales Maximum $H(\frac{1}{3}; \frac{4}{9})$.

b) Es ist

$$\int f(x)\,dx = \int \left(3\,x^3 - 6\,x^2 + 3\,x\right)\,dx =$$
$$= 3 \cdot \frac{1}{4}\,x^4 - 6 \cdot \frac{1}{3}\,x^3 + 3 \cdot \frac{1}{2}\,x^2 + C = \frac{3}{4}\,x^4 - 2\,x^3 + \frac{3}{2}x^2 + C;$$

damit ist etwa $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{3}{4}\,x^4 - 2\,x^3 + \frac{3}{2}x^2$, eine Stammfunktion von f.

c) Es ist

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1}\left(3\,x^3 - 6\,x^2 + 3\,x\right)\,dx = \left[\frac{3}{4}\,x^4 - 2\,x^3 + \frac{3}{2}\,x^2\right]_{-1}^{1} =$$
$$= \left(\frac{3}{4}\cdot 1^4 - 2\cdot 1^3 + \frac{3}{2}\cdot 1^2\right) - \left(\frac{3}{4}\cdot(-1)^4 - 2\cdot(-1)^3 + \frac{3}{2}\cdot(-1)^2\right) =$$
$$= \left(\frac{3}{4} - 2 + \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{3}{4} + 2 + \frac{3}{2}\right) = -4$$

oder unter Verwendung der in b) ermittelten Stammfunktion

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = F(1) - F(-1) = \frac{1}{4} - \frac{17}{4} = -\frac{16}{4} = -4.$$

Ferner gilt unter Berücksichtigung des in a) untersuchten Funktionsverlaufs

$$\int_{-1}^{1} |f(x)|\,dx = \int_{-1}^{0} |f(x)|\,dx + \int_{0}^{1} |f(x)|\,dx$$

mit

$$\int_{-1}^{0} |f(x)|\,dx = \int_{-1}^{0} (-f(x))\,dx = \int_{-1}^{0}\left(-3\,x^3 + 6\,x^2 - 3\,x\right)\,dx =$$
$$= \left[-\frac{3}{4}\,x^4 + 2\,x^3 - \frac{3}{2}\,x^2\right]_{-1}^{0} = 0 - \left(-\frac{17}{4}\right) = \frac{17}{4}$$

und

$$\int_{0}^{1} |f(x)|\,dx = \int_{0}^{1} f(x)\,dx = \int_{0}^{1}\left(3\,x^3 - 6\,x^2 + 3\,x\right)\,dx =$$
$$= \left[\frac{3}{4}\,x^4 - 2\,x^3 + \frac{3}{2}\,x^2\right]_{0}^{1} = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$$

und damit

$$\int_{-1}^{1} |f(x)|\,dx = \int_{-1}^{0} |f(x)|\,dx + \int_{0}^{1} |f(x)|\,dx = \frac{17}{4} + \frac{1}{4} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2};$$

unter Verwendung der Stammfunktion F ergibt sich alternativ

$$\int_{-1}^{1} |f(x)|\,dx = \int_{-1}^{0} |f(x)|\,dx + \int_{0}^{1} |f(x)|\,dx =$$
$$= \int_{-1}^{0} (-f(x))\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx = -\int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx =$$
$$= -\left(F(0) - F(-1)\right) + \left(F(1) - F(0)\right) =$$
$$= F(1) - 2\cdot F(0) + F(-1) = \frac{1}{4} - 2\cdot 0 + \frac{17}{4} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}.$$

Die (unterhalb der x–Achse liegende) von G_f und der x–Achse im Bereich von -1 bis 0 begrenzte Teilfläche besitzt den Inhalt $A_1 = \frac{17}{4}$, die (oberhalb der x–Achse liegende) von G_f und der x–Achse im Bereich von 0 bis 1 begrenzte Teilfläche den Inhalt $A_2 = \frac{1}{4}$; für die bestimmten Integrale gilt daher $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = A_2 - A_1$ und $\displaystyle\int_{-1}^{1} |f(x)|\,dx = A_2 + A_1$.

10. a) Die gegebene Menge

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \ \text{ und } \ e^x - 1 \leq y \leq e^{-x} + 1\right\}.$$

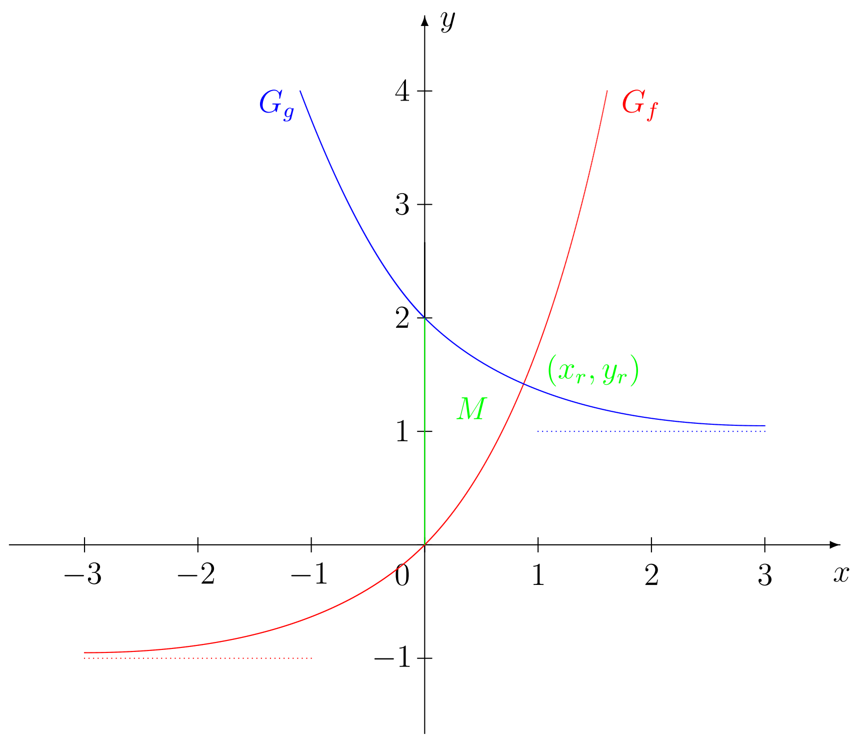
wird durch die y–Achse nach links sowie den Graphen G_f der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x - 1,$$

nach unten und den Graphen G_g der Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = e^{-x} + 1,$$

nach oben begrenzt.



Für den rechten Eckpunkt (x_r, y_r) von M gilt $f(x_r) = y_r$ und $g(x_r) = y_r$, also

$$e^{x_r} - 1 = f(x_r) = y_r = g(x_r) = e^{-x_r} + 1,$$

und mit der Substitution

$$z = e^{x_r} > 0 \qquad \text{und damit} \qquad e^{-x_r} = \frac{1}{e^{x_r}} = \frac{1}{z}$$

ergibt sich

$$
e^{x_r} - 1 = e^{-x_r} + 1 \iff z - 1 = \frac{1}{z} + 1 \iff z - 2 = \frac{1}{z} \iff
$$
$$
\iff z^2 - 2\,z = 1 \iff z^2 - 2\,z + 1 = 2 \iff (z-1)^2 = 2 \underset{z-1>-1}{\iff}
$$
$$
\iff z - 1 = \sqrt{2} \iff z = 1 + \sqrt{2} \iff x_r = \ln z = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)
$$

und damit

$$
y_r = e^{x_r} - 1 = e^{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)} - 1 = \left(1+\sqrt{2}\right) - 1 = \sqrt{2}.
$$

b) Für den gesuchten Flächeninhalt A_M von M ergibt sich

$$
\begin{aligned}
A_M &= \int_0^{x_r} (g(x) - f(x))\;dx = \int_0^{x_r} \left(\left(e^{-x}+1\right) - \left(e^x - 1\right)\right)\;dx = \\
&= \int_0^{x_r} \left(e^{-x} - e^x + 2\right)\;dx = \Big[- e^{-x} - e^x + 2\,x \Big]_0^{x_r} = \\
&= \Big(- \underbrace{e^{-x_r}}_{\underset{\text{a)}}{=} e^{x_r}-2} - e^{x_r} + 2\,x_r \Big) - \Big(- e^0 - e^0 + 2\cdot 0 \Big) = \\
&= \Big(2 - 2\,e^{x_r} + 2\,x_r \Big) + 2 = 4 - 2\,e^{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)} + 2\,\ln\left(1+\sqrt{2}\right) = \\
&= 4 - 2\left(1+\sqrt{2}\right) + 2\,\ln\left(1+\sqrt{2}\right) = 2 - 2\sqrt{2} + 2\,\ln\left(1+\sqrt{2}\right).
\end{aligned}
$$

11. a) Die Funktion

$$
f_1 : [-1;1] \to \mathbb{R}, \quad f_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } -1 \le x \le 0, \\ 2, & \text{für } 0 < x \le 1 \end{cases}
$$

ist als Treppenfunktion integrierbar, wegen $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 2 \neq 1 = f(0)$ aber nicht stetig.

b) Nach dem Satz von Weierstraß besitzt die stetige Funktion $f_2 : [-1;1] \to \mathbb{R}$ ein globales Minimum p und ein globales Maximum q, und für den Wertebereich gilt $W_f = [f(p); f(q)]$; damit ist f_2 beschränkt.

c) Bekanntlich ist die Funktion

$$
f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_3(x) = |x|,
$$

stetig, aber (an der Stelle $a = 0$) nicht differenzierbar.

d) Die Funktion

$$
f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_4(x) = \begin{cases} x^2\,\sin\frac{1}{x}, & \text{für } x \neq 0, \\ 0, & \text{für } x = 0, \end{cases}
$$

ist zunächst an allen Stellen $x \neq 0$ differenzierbar mit

$$f_4'(x) = 2\,x \cdot \sin\frac{1}{x} + x^2 \cdot \cos\frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2\,x\,\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}.$$

Des weiteren ist

$$\left|\frac{f_4(x) - f_4(0)}{x - 0}\right| = \left|x\,\sin\frac{1}{x}\right| = \underbrace{|x|}_{\to 0} \cdot \underbrace{\left|\sin\frac{1}{x}\right|}_{\leq 1} \xrightarrow[x \to 0]{} 0;$$

damit ist f_4 auch im Punkt 0 differenzierbar mit $f_4'(0) = 0$. Zum Nachweis, daß die Ableitung f_4' im Punkt $a = 0$ unstetig ist, betrachten wir die Nullfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen

$$f_4'(x_n) = \frac{2}{2n\pi}\,\sin(2n\pi) - \cos(2n\pi) = \frac{1}{n\pi} \cdot \underbrace{\sin(2n\pi)}_{=0} - \underbrace{\cos(2n\pi)}_{=1} = -1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\lim_{n\to\infty} f_4'(x_n) = -1 \neq 0 = f_4'(0);$$

damit ist f_4' im Punkt $a = 0$ unstetig.

12. Die Funktion

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(t) = \cos t \cdot \arctan t,$$

ist als Produkt der beiden stetigen Funktionen cos und arctan selbst stetig und damit über jedem abgeschlossenen Intervall $[a; b]$ integrierbar; insbesondere existiert das Integral $\displaystyle\int_0^x h(t)\,dt$ für jedes $x \in \mathbb{R}$, wobei für $x = 0$ die Festlegung $\displaystyle\int_0^0 h(t)\,dt = 0$ sowie für $x < 0$ die Konvention $\displaystyle\int_0^x h(t)\,dt = -\int_x^0 h(t)\,dt$ greift. Darüber hinaus ist nach dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung die Integralfunktion

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^x h(t)\,dt,$$

differenzierbar mit

$$F'(x) = h(x) = \cos x \cdot \arctan x$$

für alle $x \in \mathbb{R}$; des weiteren ist die Funktion h (als Produkt differenzierbarer Funktionen) selbst differenzierbar, und nach der Produktregel gilt

$$F''(x) = h'(x) = -\sin x \cdot \arctan x + \cos x \cdot \frac{1}{1 + x^2}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Wegen

$$F'(0) = \underbrace{\cos 0}_{=1} \cdot \underbrace{\arctan 0}_{=0} = 0$$

und

$$F''(0) = \underbrace{-\sin 0}_{=0} \cdot \underbrace{\arctan 0}_{=0} + \underbrace{\cos x}_{=1} \cdot \frac{1}{\underbrace{1 + x^2}_{=1}} = 1 > 0$$

besitzt die Funktion F an der Stelle 0 ein (isoliertes) lokales Minimum.