MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2014
Blatt 1
23.04.2014

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“ — Bearbeitungsvorschlag —

1. Die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \exp(x^3) + \arctan x + x^2 - 2$$

ist als Summe und Komposition von Polynomfunktionen, der Exponentialfunktion und des Arcus tangens selbst stetig und differenzierbar; ferner ist

$$f(0) = \exp(0^3) + \arctan 0 + 0^2 - 2 = 1 + 0 + 0 - 2 = -1 < 0.$$

Wegen

$$f(x) = \underbrace{\exp(x^3)}_{\to 0} + \underbrace{\arctan(x)}_{\to -\frac{\pi}{2}} + \underbrace{x^2}_{\to +\infty} - 2 \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

gibt es ein $a < 0$ mit $f(a) > 0$, und die stetige Funktion f besitzt nach dem Nullstellensatz mindestens eine Nullstelle $\xi_1 \in \,]a; 0[$; wegen

$$f(x) = \underbrace{\exp(x^3)}_{\to +\infty} + \underbrace{\arctan(x)}_{\to \frac{\pi}{2}} + \underbrace{x^2}_{\to +\infty} - 2 \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

gibt es ein $b > 0$ mit $f(b) > 0$, und die stetige Funktion f besitzt nach dem Nullstellensatz mindestens eine Nullstelle $\xi_2 \in \,]0; b[$. Insgesamt besitzt also f mindestens zwei Nullstellen, nämlich $\xi_1 < 0$ und $\xi_2 > 0$, und folglich nach dem Satz von Rolle eine Nullstelle $\xi \in \,]\xi_1; \xi_2[$ der Ableitung.

2. Wir betrachten die Einschränkung f der Sinusfunktion auf das abgeschlossene Intervall $[a; b]$, es ist also

$$f : [a; b] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin x.$$

Damit ist f differenzierbar mit $f'(x) = \cos x$ für alle $x \in [a; b]$; insbesondere genügt f den Voraussetzungen des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, nämlich Stetigkeit auf $[a; b]$ und Differenzierbarkeit auf $]a; b[$. Der Mittelwertsatz liefert nun ein $\xi \in \,]a; b[$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \qquad \text{also} \qquad \cos \xi = \frac{\sin b - \sin a}{b - a}.$$

Da nun die Cosinusfunktion auf den Intervall $[0;\pi]$ streng monoton fallend ist, folgt aus $0 < a < \xi < b < \pi$ schon $\cos a > \cos \xi > \cos b$, also

$$\cos b < \frac{\sin b - \sin a}{b-a} < \cos a,$$

woraus sich wegen $b - a > 0$ die Beziehung

$$(b-a)\,\cos b < \sin b - \sin a < (b-a)\,\cos a$$

ergibt.

3. Zu betrachten ist eine differenzierbare (mithin stetige) Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(0) = -3 \qquad \text{und} \qquad 1 < f'(x) < 2 \qquad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Insbesondere ist damit die Funktion f für jedes $b > 0$ auf dem abgeschlossenen Intervall $[0, b]$ stetig und auf dem offenen Intervall $]0, b[$ differenzierbar, erfüllt also die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung; folglich existiert ein $\xi_b \in\,]0, b[$ mit

$$\frac{f(b) - f(0)}{b-0} = f'(\xi_b) \qquad \text{bzw.} \qquad f(b) - f(0) = f'(\xi_b) \cdot (b-0)$$

und damit

$$f(b) = f(0) + f'(\xi_b) \cdot b \qquad \text{bzw.} \qquad f(b) = -3 + f'(\xi_b) \cdot b.$$

Demnach ergibt sich für $b = 1$ zum einen

$$f(1) = -3 + f'(\xi_1) \cdot 1 = -3 + \underbrace{f'(\xi_1)}_{<2} < -3 + 2 = -1 < 0$$

und für $b = 3$ zum anderen

$$f(3) = -3 + f'(\xi_3) \cdot 3 = -3 + 3\,\underbrace{f'(\xi_3)}_{>1} > -3 + 3 \cdot 1 = 0;$$

damit besitzt die auf dem abgeschlossenen Intervall $[1, 3]$ insbesondere stetige Funktion f wegen $f(1) < 0$ und $f(3) > 0$ nach dem Nullstellensatz (mindestens) eine Nullstelle $\xi \in [1, 3]$.

4. Wir haben zu zeigen, daß die Funktion

$$h : [a; b] \to \mathbb{R}, \quad h(x) = (f(x))^2 - (g(x))^2\,,$$

auf $]a; b[$ konstant ist und dort stets den Wert 1 annimmt. Da nach Voraussetzung f und g auf $[a; b]$ stetig und auf $]a; b[$ differenzierbar sind, ist h als Differenz der Quadrate von f und g ebenfalls auf $[a; b]$ stetig und auf $]a; b[$ differenzierbar, und für alle $x \in\,]a; b[$ gilt unter Verwendung der Kettenregel

$$h'(x) = 2\,f(x)\,\underbrace{f'(x)}_{=g(x)} - 2\,g(x)\,\underbrace{g'(x)}_{=f(x)} = 2\,f(x)\,g(x) - 2\,g(x)\,f(x) = 0.$$

Folglich ist h auf $]a;b[$ konstant, es gibt also ein $c \in \mathbb{R}$ mit $h(x) = c$ für alle $x \in\,]a;b[$. Wegen der Stetigkeit von h im Punkt a ergibt sich

$$c = \lim_{x \to a+} h(x) = h(a) = (\underbrace{f(a)}_{=1})^2 - (\underbrace{g(a)}_{=0})^2 = 1^2 - 0^2 = 1.$$

Damit gilt $(f(x))^2 - (g(x))^2 = h(x) = 1$ für alle $x \in\,]a;b[$.