

Übungen zur Vorlesung „Differential- und Integralrechnung II“

41. Für Teilmengen $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ beweise oder widerlege man:
- Sind X_1 und X_2 konvex, so ist auch $X_1 \cup X_2$ konvex.
 - Sind X_1 und X_2 konvex, so ist auch $X_1 \cap X_2$ konvex.
 - Sind X_1 und X_2 zusammenhängend, so ist auch $X_1 \cup X_2$ zusammenhängend.
 - Sind X_1 und X_2 zusammenhängend, so ist auch $X_1 \cap X_2$ zusammenhängend.
42. a) Man zeige, daß die Teilmenge $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ weder innere noch äußere Punkte besitzt, und gebe den Rand $\partial\mathbb{Q}$ von \mathbb{Q} an.
b) Man entscheide, ob die Teilmenge $X = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ offen bzw. abgeschlossen bzw. kompakt ist.

43. a) Für eine Teilmenge $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}^n$ und einen Punkt $a \in X$ wird der *Abstand*

$$\text{dist}(a, X) = \inf \{d(a, x) \mid x \in X\}$$

von a und X definiert. Man zeige: $\text{dist}(a, X) = 0 \iff a \in \overline{X}$.

- b) Im Falle $X \neq \mathbb{R}^n$ wird mit dem Komplement $Y = \mathbb{R}^n \setminus X$ auch der *signierte Abstand*

$$\text{sdist}(a, X) = \begin{cases} \text{dist}(a, X), & \text{falls } a \notin X, \\ -\text{dist}(a, Y), & \text{falls } a \in X, \end{cases}$$

definiert. Man zeige:

- $\text{sdist}(a, X) < 0 \iff a$ ist ein innerer Punkt von X .
- $\text{sdist}(a, X) > 0 \iff a$ ist ein äußerer Punkt von X .
- $\text{sdist}(a, X) = 0 \iff a$ ist ein Randpunkt von X .

44. Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = 1 - |x_1| - |x_2|,$$

sowie das Quadrat $Q = [-1; 1] \times [-1; 1] \subseteq \mathbb{R}^2$ mit den Eckpunkten $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ und $(1, -1)$.

- Man ermittle das Verhalten von f auf den Parallelen der Koordinatenachsen.
- Man bestimme die Höhenlinien $N_f(c)$ sowie den Wertebereich W_f von f .
- Man skizziere den Graphen G_f von f auf dem Quadrat Q .

Abgabe bis Mittwoch, den 9. Juli 2014, 14⁰⁰ Uhr (Kästen vor der Bibliothek).