

## Übungen zur Vorlesung „Differential- und Integralrechnung II“

41. Für Teilmengen  $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{R}^2$  mit  $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$  beweise oder widerlege man:

- Sind  $X_1$  und  $X_2$  konvex, so ist auch  $X_1 \cup X_2$  konvex.
- Sind  $X_1$  und  $X_2$  konvex, so ist auch  $X_1 \cap X_2$  konvex.
- Sind  $X_1$  und  $X_2$  zusammenhängend, so ist auch  $X_1 \cup X_2$  zusammenhängend.
- Sind  $X_1$  und  $X_2$  zusammenhängend, so ist auch  $X_1 \cap X_2$  zusammenhängend.

42. a) Man zeige, daß die Teilmenge  $Q \subseteq \mathbb{R}$  weder innere noch äußere Punkte besitzt, und gebe den Rand  $\partial Q$  von  $Q$  an.

- Man entscheide, ob die Teilmenge  $X = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$  offen bzw. abgeschlossen bzw. kompakt ist.

43. a) Für eine Teilmenge  $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}^n$  und einen Punkt  $a \in X$  wird der *Abstand*

$$\text{dist}(a, X) = \inf \{d(a, x) \mid x \in X\}$$

von  $a$  und  $X$  definiert. Man zeige:  $\text{dist}(a, X) = 0 \iff a \in \overline{X}$ .

- Im Falle  $X \neq \mathbb{R}^n$  wird mit dem Komplement  $Y = \mathbb{R}^n \setminus X$  auch der *signierte Abstand*

$$\text{sdist}(a, X) = \begin{cases} \text{dist}(a, X), & \text{falls } a \notin X, \\ -\text{dist}(a, Y), & \text{falls } a \in X, \end{cases}$$

definiert. Man zeige:

- $\text{sdist}(a, X) < 0 \iff a$  ist ein innerer Punkt von  $X$ .
- $\text{sdist}(a, X) > 0 \iff a$  ist ein äußerer Punkt von  $X$ .
- $\text{sdist}(a, X) = 0 \iff a$  ist ein Randpunkt von  $X$ .

44. Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = 1 - |x_1| - |x_2|,$$

sowie das Quadrat  $Q = [-1; 1] \times [-1; 1] \subseteq \mathbb{R}^2$  mit den Eckpunkten  $(1, 1)$ ,  $(-1, 1)$ ,  $(-1, -1)$  und  $(1, -1)$ .

- Man ermittle das Verhalten von  $f$  auf den Parallelen der Koordinatenachsen.
- Man bestimme die Höhenlinien  $N_f(c)$  sowie den Wertebereich  $W_f$  von  $f$ .
- Man skizziere den Graphen  $G_f$  von  $f$  auf dem Quadrat  $Q$ .

**Abgabe** bis Mittwoch, den 9. Juli 2014, 14<sup>00</sup> Uhr (Kästen vor der Bibliothek).