

Übungen zur Vorlesung „Differential- und Integralrechnung II“

29. (Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2008).

- a) Man bestimme das Konvergenzintervall der Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(x-1)^n.$$

- b) Man gebe eine Potenzreihendarstellung für die Integralfunktion

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt$$

im Innern des Konvergenzintervalls von a) an.

- c) Man stelle F und f als elementare Funktionen dar.

30. (Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2005).

- a) Man untersuche, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Reihe

$$S_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{\sqrt[3]{n}\sqrt[3]{n+1}}$$

konvergent ist.

- b) Man untersuche, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Reihe $S_1(x)$, die sich durch gliedweises Differenzieren der Summanden von $S_0(x)$ ergibt, konvergent ist.
- c) Für welche x aus dem Konvergenzbereich $I_0 \subseteq \mathbb{R}$ von S_0 ist die auf I_0 definierte Funktion $f: I_0 \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto S_0(x)$ differenzierbar mit $f'(x) = S_1(x)$?

31. (Staatsexamensaufgabe Frühjahr 1998.) Gegeben sei die Potenzreihe

$$\frac{x^2}{2 \cdot 1} - \frac{x^3}{3 \cdot 2} + \frac{x^4}{4 \cdot 3} - \frac{x^5}{5 \cdot 4} + \dots = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n(n-1)}.$$

- a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert diese Reihe?
- b) Man zeige

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n(n-1)} = -x + (1+x) \ln(1+x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$. (Hinweis: Man differenziere.)

32. (Staatsexamensaufgabe Herbst 2009).

- a) Man stelle unter Verwendung der Exponentialreihe die Funktion

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$$

als Potenzreihe dar.

- b) Man bestimme das Taylorpolynom $T_n(x)$ von kleinstem Grad $n \in \mathbb{N}$, für das $|T_n(1) - F(1)| < \frac{1}{40}$ gilt.

Abgabe bis Mittwoch, den 18. Juni 2014, 14⁰⁰ Uhr (Kästen vor der Bibliothek).