

Übungen zur Vorlesung „Differential- und Integralrechnung II“

25. (Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2012).

a) Man bestimme den Konvergenzradius ρ der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{3^n} (5n^2 + 1)} x^n$$

b) Man untersuche, ob die gegebene Potenzreihe an den Stellen $x = \rho$ und $x = -\rho$ konvergiert oder divergiert.

26. (Staatsexamensaufgabe Herbst 2009). Gegeben sei die durch

$$a_1 = 4 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

a) Man zeige, daß die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, und bestimme den Grenzwert.

b) Man bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^n}{\sqrt{n}} x^n.$$

c) Man bestimme, ob die Potenzreihe in $x = \frac{1}{3}$ konvergiert.

27. (Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2010). Es sei $(a_n)_{n \geq 0}$ eine Folge in \mathbb{R} . Man bestimme die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für welche die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

konvergiert, in folgenden Fällen:

a) Die Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ konvergiert gegen ein $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$,

b) Die Folge $(n^2 a_n)_{n \geq 0}$ konvergiert gegen ein $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$,

c) $(a_n)_{n \geq 0}$ ist eine monoton fallende Nullfolge, und für alle $n \geq 1$ ist $a_n \geq \frac{1}{n}$.

28. (Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2001). Man bestimme für die Funktionen

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^x, \quad \text{und} \quad f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x},$$

jeweils die Taylorreihe mit dem Entwicklungspunkt $a = 2$ und gebe die Konvergenzintervalle dieser Reihen an.

Abgabe bis Mittwoch, den 11. Juni 2014, 14⁰⁰ Uhr (Kästen vor der Bibliothek).